



**BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR**

KVANTUMKAOTIKUS RENDSZEREK VIZSGÁLATA

Siska Ádám

Témavezető:

Dr. Varga Imre, PhD.

BME–TTK Elméleti Fizika Tanszék

BME–TTK Elméleti Fizika Tanszék

Budapest, 2012.

DIPLOMAMUNKA JAVASLAT

Melyik modul(ok)ban szakosodott hallgatónak ajánlott?: D-2008-078

Kondenzált anyagok fizikája

A diplomamunka címe:

Kvantum kaotikus rendszerek vizsgálata

A kidolgozandó feladat részletezése:

A legtöbb klasszikus határesetben kaotikus rendszer spektrumát a véletlen mátrix elmélet írja le, míg az integrálható dinamikájú rendszereket a Poisson-statisztika. Legújabban olyan fizikai modellek is felbukkantak, melyek spektrális fluktuációit az ún. kritikus statisztika írja le, mely a rendezetlenség hatására létrejövő fém-szigetelő átalakulásra jellemző.

Másfelől a kevert fázisterű rendszerek leírására különböző közelítések ismeretesek. Az ilyen rendszerekben a különböző mennyiségeket leíró operátorok mátrixelemeinek eloszlását szemi-klasszikus közelítések segítségével kaphatjuk meg.

A diplomamunka kidolgozása során több modellt is vizsgálhatunk, pl. standard, fűrészfog, 'catmap', 'bakemap' leképezések, illetve más nemlineáris dinamikával rendelkező modelleket különös tekintettel a kritikus statisztikát produkáló modellekre. A következő lehetséges feladatokat lehet kitűzni:

- Megvizsgálható a kritikus statisztikájú rendszerek spektrális és hullámfüggvény statisztikája, illetve a benne indított hullámcsomag viselkedése alapján dinamikai tulajdonságok megismerése.
- Megvizsgálható a megfigyelhető mennyiségek mátrixelemeinek eloszlása és összevethető ezen mennyiségeknek a klasszikus periodikus pályák mentén értelmezett integráljaival.
- Tanulmányozható a periodikus pályák és a kvantummechanikai időfejlesztés operátorának sajátállapotai közötti kapcsolat.
- Milyen kapcsolatban áll a dinamikai lokalizáció a kritikus statisztikájú rendszerekkel? Létrejöhet-e dinamikai lokalizáció, és hogyan?

A diplomázóval szemben támasztott elvárások:

Elméleti mechanikai, kvantummechanikai és statisztikus fizikai ismeretekre valamint numerikus szimulációk elvégzésére van szükség.

A diplomamunka készítésének helye és címe:

BME Elméleti Fizika Tanszék,
1111 Budapest, Budafoki u. 8., F ép. III. lépcsőház, magasföldszint 6/7.

A konzulens (témavezető) adatai

Neve: Dr. Varga Imre

Tudományos fokozata: fiz.tud.kand./PhD

Telefon: 463-4109

E-mail: varga@phy.bme.hu

A tanszéki témavezető adatai (ha a téma kiírója külső intézmény dolgozója)

Neve:

Tudományos fokozata:

Telefon:

E-mail:

Kivonat

A káosz-elmélet kvantummechanikai vonatkozásai egy olyan tudományterületet alkotnak, mely csak az utóbbi két évtizedben vált a komoly kutatás tárgyává, s a mai napig dinamikusan fejlődik. Legújabbán a kvantum-számítógépeket övező érdeklődés következtében kapott új lendületet e témakör.

Habár számos kvantumrendszert ismerünk, melynek a klasszikus határátmenet során kapott makroszkopikus megfelelője a káosz jeleit mutatja, a mai napig nem létezik olyan egységes elmélet, ami világosan magyarázná e rendszerek legfőbb jellemzőit, s ez különösen igaz a dinamikai tulajdonságaikra. Ezzel szemben számos olyan tendencia figyelhető meg, amely univerzális viselkedési minták létezésére utal.

A kvantumkaotikus rendszerek kutatását nehezíti, hogy a kvantumkaotikusság fogalma jelenleg még nem definiált, sőt, szigorú értelemben véve a kvantumkáosz nem is értelmezhető. Ráadásul az utóbbi időkben egyre több modell születik, amelyek olyan speciális tulajdonságokkal bírnak, melyeket sem a kaotikus, sem a lineáris rendszerek-nél nem figyelhetünk meg. E kritikus rendszerek vizsgálata szintén a kvantumkáossal kapcsolatos kutatásokból nőtte ki magát.

E dolgozat a fent említett tendenciák, univerzalitást sejtető eredmények egy részét foglalja össze, különös tekintettel a kritikus rendszerek jellemzőire.

Bevezetés

Habár már a XIX. század második fele óta ismert, hogy bizonyos dinamikai rendszerek egyáltalán nem tárgyalhatók a lineáris elméletek keretein belül, a káosz, mint egyetemes jelenség, csak az utóbbi évtizedek során vált komoly kutatási területté. Ennek egyik alapvető oka, hogy a nemlineáris rendszerek tanulmányozása olyan számítási kapacitást igényel, amely csak a számítógépek elterjedésével vált elérhetővé.

A káoszt sokáig kizárólag klasszikus mechanikai modelleken keresztül vizsgálták, s az elmélet legfontosabb állításai és definíciói szorosan kötődnek a klasszikus mechanika fogalmaihoz. Nem tudjuk, nem is akarjuk eldönteni, hogy a két iménti állítás közül melyik az ok és melyik az okozat – habár ez kétségkívül egy érdekes kultúrtörténeti kérdés. E dolgozat szempontjából a puszta következmény a fontosabb: a kvantummechanikai rendszerek kaotikus vonásai még a káoszelméleti kutatásokon belül is a perifériára szorultak, olyannyira, hogy ma sincs teljes egyetértés arról, hogy vajon létezhet-e egyáltalán káosz a kvantummechanikai rendszerekben. Az ellentmondás abból fakad, hogy egyfelől a kvantummechanika egy lineáris elmélet – így összeegyeztethetetlen a nemlineáris rendszerekre épülő káosz-elmélettel –, másfelől bármelyik klasszikus kaotikus dinamikai rendszer kvantálható, s a korrespondencia-elv miatt az így kapott kvantumrendszertől azt várjuk, hogy az kaotikusan viselkedjen. Épp ezért helyesebbnek tűnik a M. V. Berry által bevezetett „kvantum-kaológia” (*quantum chaology*) elnevezés annak a jelenségkörnek a leírására, amit többnyire „kvantumkáosznak” hívunk.

Hogyan dönthetjük el egy kvantummechanikai rendszerről, hogy annak klasszikus határeseté kaotikus-e? A cél egy olyan módszer kidolgozása, amely a klasszikus határátmenet elvégzése nélkül is képes e kérdésre választ adni. Ez azért fontos, mert az elmúlt években több olyan modellt is publikáltak, amelyek – habár nem rendelkeznek klasszikus határesettel – nagyfokú hasonlóságot mutatnak más kvantum-kaologikus rendszerekkel. A feltételezésünk az, hogy az utolsó fejezetben bevezetendő hűség mérése megfelelő módszernek bizonyulhat e kérdés egyértelmű eldöntéséhez.

Az eddigiek abból a hallgatóságos feltételezésből indulnak ki, hogy egy rendszer vagy kaotikus, vagy lineáris, s más eset elő sem fordulhat. Ám egyre több olyan modell lát napvilágot, amely – bizonyos feltételek teljesülése esetén – egyik kategóriába sem sorolható. E modellek közös jellemzője, hogy paramétereik függvényében képesek akár lineáris, akár kaotikus jellegű klasszikus határátmenetet adni. „Fázisátalakuláskor”, vagyis azoknál a paramétereknél, amelyeknél e rendszerek klasszikus határesetei a kaotikusság és a linearitás között „átbillennek”, e modellek valamilyen köztes, ún. kritikus állapotba kerülnek. E dolgozat legfőbb célkitűzése, hogy e köztes állapotokat minél több oldalukról bemutassa. Tudománytörténeti érdekesség, hogy a legelső ilyen típusú fázisátalakulással bíró rendszert (az Anderson-modellt) nem a (kvantum)káoszelmélet keretei között, hanem a mezoszkopikus rendszerek világában írták le. Mivel az Anderson-féle fém-szigetelő átmenetet könnyű kísérletileg megfigyelni, ezért e modell kulcsszerepet játszik a kritikus rendszerek vizsgálatában, annak ellenére, hogy maga az

Anderson-átmenet nem kötődik a kvantumkaotikus rendszerek elméletéhez.

E dolgozat négy nagy egységre oszlik.

Az első rész röviden összefoglalja a kaotikus dinamikai rendszerek legfőbb ismérveit. Bevezeti továbbá a rugdosott rotátort, egy igen elterjedt dinamikai rendszert, mely ún. kevert fázistérrel rendelkezik (vagyis egyidejűleg mutat kaotikus és lineáris vonásokat). A rendszer kvantálásakor láthatjuk, hogy a kaotikus régióban tapasztalt diffúzió eltűnik, illusztrálva, hogy a klasszikus esetben tapasztalható káoszt a kvantálás hogyan és miért képes megszüntetni. Ezen túlmenően láthatunk még két kvantumrendszert, melyek egyike egyáltalán nem is rendelkezik klasszikus határátmenettel.

A második rész egy olyan általános matematikai eszköztárat ismertet – a véletlen mátrixok elméletét –, mely kulcsfontosságúnak bizonyult a kvantum-kaológia számára, mind az elméleti számítások, mind a numerikus szimulációk terén.

A harmadik rész röviden ismerteti az Anderson-modellt, valamint a modell által jóslott fém-szigetelő átmenet legfőbb jellemzőit. Habár első olvasatra úgy tűnhet, hogy e fejezet nem kapcsolódik szervesen a dolgozat többi részéhez, a kutatások és a referenciák miatt az Anderson-modell olyan központi helyet foglal el a kvantum-kritikus rendszerek kutatásában, hogy megítélésünk szerint megkerülhetetlen egy, a témát feldolgozó munka számára.

A negyedik rész azt vizsgálja, hogy hogyan mérhetjük egy tetszőleges dinamikai rendszer stabilitását az őt érő perturbációkkal szemben, valamint, hogy milyen összefüggés van egy adott rendszer kaotikussága és a külső perturbációkkal szembeni viselkedése között. Ahogy utaltunk rá, meggyőződésünk, hogy lehetséges lenne a kvantumkaotikus rendszerek egy olyan, alternatív meghatározását adni, amely ezekből a vizsgálatokból indul ki.

A Függelék olyan általános definíciókat és levezetéseket tartalmaz, amelyekre e munka több ponton is hivatkozik. Ezért – amennyiben e fogalmak az Olvasó számára nem egyértelműek – célszerű először a Függeléket elolvasni.

Dolgozatunkban – amennyiben azt külön nem jelezzük – a következő jelölések érvényesek: N jelöli egy mátrix rangját, illetve az általa leírt Hamilton-operátor által definiált rendszer nívóinak számát; a termodinamikai határeset az $N \rightarrow \infty$ átmenetet jelenti; az általános A mátrix egy elemét a_{ij} jelöli; σ egy adott valószínűségi változó szórása (amennyiben adott mátrixelem szórásáról beszélünk, úgy a σ_{ij} jelölést használjuk).

Tartalomjegyzék

Bevezetés	I
1. Kaotikus dinamika	1
1.1. Klasszikus és kvantumkáosz	1
1.2. A rugdosott rotátor	3
1.3. Anomális diffúzió	5
1.4. Anomális rugdosott rotátor	7
1.5. Intervallum-felcserélő leképezés	10
2. Véletlen mátrix elmélet	14
2.1. Alapvető sokaságok	14
2.2. Statisztikák	17
2.3. Kapcsolat a kaotikus rendszerekkel	21
3. Rendezetlen rendszerek	24
3.1. Az Anderson-modell	24
3.2. Analógiák	26
4. Dinamikai stabilitás	28
4.1. Loschmidt paradoxona	29
4.2. Hűség	30
4.3. Lineáris válaszelmélet	33
4.4. A hűség vizsgálata véletlen mátrixokkal	37
Zárszó	43
Függelék	44
A. Multifraktalitás	44
B. Statisztikák	45
C. Numerikus módszerek	50
C.1. Intervallum-felcserélő leképezés	50
C.2. A hűség számítása	51
Hivatkozások	53

1. Kaotikus dinamika

1.1. Klasszikus és kvantumkáosz

A klasszikus dinamika „fegyvertára” a rendszer általánosított koordinátáinak és impulzusainak fázistere és a fázistéren értelmezett hatás. E hatásból származtatjuk – a hatás-elv alapján – az általánosított koordináták viselkedését leíró Hamilton-függvényt, pontosabban, az ebből következő Hamilton-Jacobi mozgásegyenleteket. Ezek olyan elsőrendű lineáris differenciál-egyenletek, melyek az általánosított koordináták és impulzusok, valamint ezek deriváltjai között teremtenek összefüggést. Ahhoz, hogy egy rendszert teljesen leírjunk, még egy dolog elengedhetetlen: ismernünk kell egy adott pillanatban az összes általánosított koordinátát és impulzust (ezeket nevezzük kezdeti feltételeknek).

A fenti leírás csak arra elég, hogy matematikai értelemben megoldjunk egy rendszert. Hogy mélyebben megértsük a viselkedését, ahhoz ennél több kell. A koordináták és impulzusok felvétele ugyanis a megfigyelő feladata, márpedig a relativitás elve pont azt mondja ki, hogy egy fizikai rendszer viselkedése nem függhet a külső megfigyelőtől. Kell, hogy legyen tehát valami, ami független a koordináta-rendszer konkrét alakjától, vagy matematikailag szólva, ami a fázistér megfelelő transzformációja esetén állandó marad. Az intuíció azt mondja, hogy ezek a mozgásállandók azok a mennyiségek, amikre úgy tekinthetünk, mint a rendszer valódi fizikai jellemzőire, s ezek megtalálása a fizika egyik kulcsfeladata.

Ha egy rendszert legalább annyi mozgásállandó jellemez, mint ahány szabadsági foka (az általánosított koordináták és impulzusok száma) van, a Hamilton-Jacobi egyenletek analitikusan megoldhatóvá válnak, vagyis felírhatjuk (ha nem is mindig zárt alakban) minden szabadsági fok időfüggvényét. Az ilyen rendszereket „integrálhatónak” nevezzük, s ez megoldhatóság az, ami miatt a klasszikus fizika sokáig szinte kizárólag az integrálható rendszerek fizikáját jelentette.

Sajnos¹ a valóságban létező rendszerek többsége kevesebb mozgásállandóval bír, mint ahány szabadsági foka van. Ezek az úgynevezett „kaotikus rendszerek”, melyek teljes modellezése csak végtelen pontosságú numerikus szimulációval volna lehetséges. Az integrálható és a kaotikus viselkedést szinte „ránézésre” meg lehet különböztetni, hiszen a káoszt két olyan látványos jelenség is kíséri, mely az integrálható modellekből hiányzik.

Az egyik ilyen jellemző a kezdeti feltételektől való exponenciális függés: ha a fázistér két tetszőleges pontjából egyidejűleg „elindítunk” két részecskét, azok távolsága exponenciálisan nőni fog az időben. Ez persze bizonyos speciális pontokban az integrálható rendszerek fázissterére is teljesül (az instabil fixpontok környékére általában

¹E sajnálkozás persze csakis a könnyű, gyors és pontos eredményre vágyó kutató, valamint a világot analitikusan leírni vágyó idealista szemszögéből érthető. Ha a valóságos rendszerek többsége integrálható lenne, azzal világunk sokszínűsége veszne oda.

mindig), ám a káoszt ez a jelenség globálisan, a fázistér minden pontpárjában jellemzi. A másik fontos tulajdonság az ergodicitás vagy keveredés, mely szintén a fázistér minden pontját jellemzi, és azt fejezi ki, hogy egy fázispontból kiinduló trajektória (a fázispontból „indított” részecske időfejlődése által leírt görbe a fázistérben) a teljes fázistér-fogatot bejárja².

A kvantummechanikában a helyzet kicsit más. Először is, a kvantummechanika nem ismeri sem az általánosított koordináták, sem az impulzusok fogalmát, így fázisterről, Hamilton-Jacobi egyenletekről és kezdeti feltételekről sem beszélhetünk. Az egyetlen lényegi közös vonás a klasszikus fizikával a hatás, melyet itt úgynevezett hullámfüggvényekkel írunk fel, ám az ebből származtatott Hamilton-operátor a Hamilton-Jacobi egyenletektől merőben más módon, a Schrödinger-egyenlet által írja le a hullámfüggvények időfejlődését. További bonyodalom, hogy ez az időfejlődés (zárt rendszerekben) unitér módon történik, így két hullámfüggvény skalárszorzata mozgásállandó; a szabadsági fokok kezdeti feltételektől való exponenciális függését nem lehet így általánosítani³. E nehézségek miatt a mai napig vita tárgya, hogy egyáltalán lehetséges-e szigorú értelemben vett káosz a kvantummechanikában?

A legegyszerűbb kínálkozó megoldás, ha azokat a kvantummechanikai rendszereket, amelyeknek klasszikus határesetje (melyet a $\hbar \rightarrow 0$ átmenet során kapunk) kaotikus, szintén kaotikusnak tekintjük, nem feltétlenül vizsgálva, hogy ez a kaotikusság pontosan hogyan képeződik le a hullámfüggvényekre. Számos kapcsolat létezik egy (ilyen értelemben) kaotikus kvantumrendszer és a neki megfelelő klasszikus rendszer között. A témával foglalkozó kutatók között általában ez a definíció tekinthető a legelterjedtebbnek.

Egy másik lehetséges megfeleltetéshez az egyes rendszerek dinamikai tulajdonságain keresztül vezethet az út. Ezt a megközelítést célszerű alkalmazni olyan esetekben, amikor például egy adott kvantummechanikai rendszernek nem képezhető fizikailag értelmes módon klasszikus határesetje. A legtermészetesebbnek az kínálkozik, ha azokat a kvantummechanikai rendszereket tekintjük kaotikusnak, amelyek a külső perturbációkkal szemben globálisan instabilak. Habár ma már tudjuk, hogy ez a definíció biztosan helytelen⁴, mivel a (klasszikus) káosz elsősorban a dinamikai tulajdonságokon keresztül mutatkozik meg, kívánatos lenne, ha a kvantumkaotikusság fő kritériumait is a rendszer dinamikáján keresztül határozhatnánk meg, egyszersmind függetlenül a káosz kvan-

²Vannak olyan kaotikus modellek, ahol ez nem teljesül, ilyen például az összes olyan modell, amelyben valamilyen spontán szimmetriasértés történik. Ekkor a trajektóriák csak a teljes fázistér-fogat egy részét járják be, oly módon, hogy a teljes fázistér-fogatot felbonthatjuk olyan diszjunkt halmazokra, amelyekre az eredeti ergodicitási feltétel már teljesül.

³Habár ez az okfejtés kétségkívül igaz, ne feledjük, hogy a hullámfüggvények nem tekinthetők minden értelemben a klasszikus fázispontok kvantummechanikai analógiájának, ráadásul két hullámfüggvény átfedése sem analóg két klasszikus fázispont távolságával, így az a törekvés, amely a kezdeti feltételektől való exponenciális függést így próbálja általánosítani, csak közelíti a valóságot.

⁴Bizonyos kvantumrendszerek, amelyek a perturbációkkal szemben nagyfokú stabilitást mutatnak, a korábbi definíció értelmében kaotikusnak tekintendők.

tummechanikai tárgyalását a klasszikus tárgyalásmódtól. E kérdéskörre e dolgozat utolsó részében térünk vissza.

E fejezetben néhány, a (kvantum)kaotikus dinamikai rendszerek tanulmányozása során felmerülő problémára, érdekességre mutatunk rá. Ehhez három egyszerű kvantumkaotikus modellt ismertetünk.

1.2. A rugdosott rotátor

Képzeljünk el egy testet, mely egy rögzített pontja körül szabadon foroghat. A „rugdosott rotátor” lényegében egy ilyen rendszer, csakhogy a szabad forgás mellett periodikusan a rendszert egy pillanatszerű külső erőhatás, egy rúgás éri (mintha csak egy „pillanatra” bekapcsolnánk a gravitációt). A (klasszikus) rendszer Hamilton-operátora [1]⁵

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\theta} p^2 + \delta_T(t) V \cos \vartheta, \quad (1)$$

ahol θ a rotátor tehetetlenségi nyomatéka, V a „rugdosó potenciál” és $\delta_T(t)$ a T periódusú Dirac-delta:

$$\delta_T(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(t - \ell T)$$

Mivel két rúgás között a rendszer szabadon fejlődik, ezért a fázistérbeli leírást helyettesíthetjük egy kétdimenziós leképezéssel. A leképezés elemei a $(p_{\tilde{t}}, \vartheta_{\tilde{t}})$ párok, melyek értéke nem más, mint az impulzusmomentum és a szögelfordulás a $[\tilde{t}]$ -edik rúgást közvetlenül követő pillanatban. Itt bevezettük a $\tilde{t} = \frac{t}{T}$ „normált” időt. Mivel a szögelfordulás 2π -periodikus, így

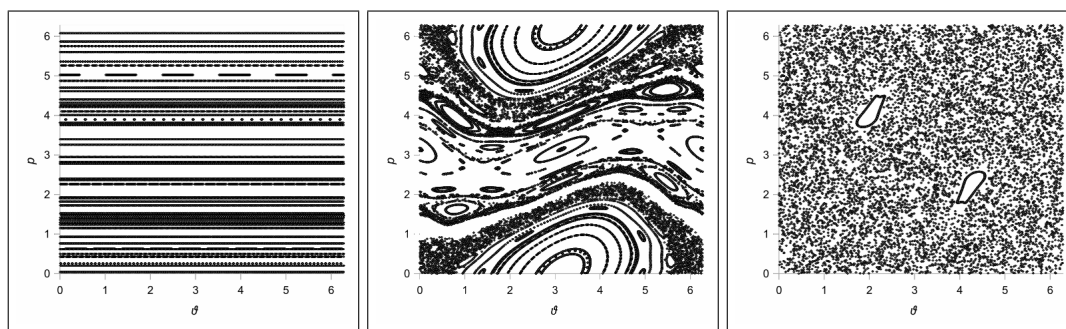
$$\begin{aligned} p_{\tilde{t}+1} &= \frac{1}{\theta} p_{\tilde{t}} + V \sin \vartheta_{\tilde{t}}, \\ \vartheta_{\tilde{t}+1} &= \vartheta_{\tilde{t}} + T p_{\tilde{t}+1} \quad \text{mod } 2\pi, \end{aligned}$$

A $P = pT$ és $K = \frac{VT}{\theta}$ új változók bevezetésével ez a következő, egyszerűbb alakra hozható (a továbbiakban elhagyjuk a hullámvonalat t -ről):

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= P_t + K \sin \vartheta_t, \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + P_{t+1} \quad \text{mod } 2\pi, \end{aligned} \quad (2)$$

Ez az ún. Standard (más néven Chirikov-Taylor) leképezés. Egyszerű kezelhetősége (mindössze egyetlen paramétert tartalmaz) és jellemvonásainak sokoldalúsága a kaotikus dinamikai rendszerek között állatorvosi lóvátette. Az új elméletek kipróbálásakor általában az elsők között van, melyekre az eredményeket alkalmazni szokás, az

⁵Az itt következő megállapítások javarészt [1]-ből származnak, ezeknél nem jelöljük ismételen e forrást.



1. ábra. A Chirikov-Taylor leképezés Poincaré-metszetei három különböző rúgási erősnél: $K = 0, 0,97, 5$

egyik leggyakoribb referencia a témában fellelhető cikkekben. Ezen felül (K kis értékeire) a Standard leképezés egy olyan általános Hamiltoni rendszert ír le, amelyben csak egyetlen, izolált, nemlineáris rezonancia van, s a többi rezonancia a perturbációszámítás keretein belül kezelhető. Mindemellett több kísérlet létezik, melyekkel a gyakorlatban is tesztelhető a modell [2], sőt e sorok szerzője még egy hangszintézis-módszert is kidolgozott, mely a Chirikov-leképezésen alapul [3].

A modell fázistere, amint láttuk, egy hengeren helyezkedik el. Ám ϑ értékén nem változtat, ha P -t megnöveljük 2π valamilyen (egész számú) többszörösével, hiszen a maradékképzés során e változás elvész. Így valójában a fázistert egy tóruszon is ábrázolhatjuk:

$$\begin{aligned} P'_{t+1} &= P'_t + K \sin \vartheta'_t \quad \text{mod } 2\pi, \\ \vartheta'_{t+1} &= \vartheta'_t + P'_{t+1} \quad \text{mod } 2\pi, \end{aligned}$$

E rendszernek három lényegesen különböző állapota van: $K = 0$ esetén minden pálya egy valamilyen $P =$ állandó egyenesnek felel meg, minden trajektória stabil, ilyenkor a rendszer teljesen integrálható állapotban van. K kis (ám nem zérus) értékeire a trajektóriák többsége alig deformálódik, ám azok a pályák, melyek P valamilyen speciális, rezonáns értékét tartalmazták, szétesnek: az addigi zárt pálya nyitottá válik és bejárja a hozzá legközelebb eső két stabil trajektória közötti teljes fázistér-szeletet. Végül K egy bizonyos értéke felett az utolsó olyan integrálható trajektória is szétesik, mely nem összehúzható egy pontba, ezáltal a teljes fázistér kaotikussá válik, mindössze néhány „integrálható sziget” marad meg (ezeket olyan zárt pályák határolják, melyek összehúzhatóak egy pontba), azonban ezek területe K -val exponenciálisan csökken. Az 1. ábra egy-egy jellemző Poincaré-metszetet mutat e három különböző állapotban.

A modell kvantálása során a következő Hamilton-operátort kapjuk:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2\theta} \mathbf{P}^2 + \delta_T(t)V \cos \vartheta$$

A klasszikus rugdosott rotátorral ellentétben (ahol megfelelő skálázással egyparaméteressé tudtuk tenni a rendszert) itt két független paraméter szükséges a viselkedés jellemzéséhez. A szakirodalomban legtöbbször a

$$\tau = \frac{\hbar T}{\theta} \quad \text{és} \quad k = \frac{V}{\hbar}$$

választással találkozhatunk, mivel ekkor a klasszikus paraméter a $K = k\tau$ alakot veszi fel és a klasszikus átmenetet a $k \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$ feltételpár biztosítja K konstans értéken való tartása mellett.

1.3. Anomális diffúzió

A rugdosott rotátor egyik legfurcsább tulajdonságára akkor derül fény, ha megvizsgáljuk a diffúziós együttható viselkedését a klasszikus és a kvantált változatban egyaránt, mégpedig a (2) szerint definiált henger alakú fázistéren.

Elemi úton könnyen belátható, hogy a klasszikus impulzusmomentumra

$$(P_t - P_0)^2 = K^2 \sum_{0 \leq i, j \leq t-1} \sin \vartheta_i \sin \vartheta_j$$

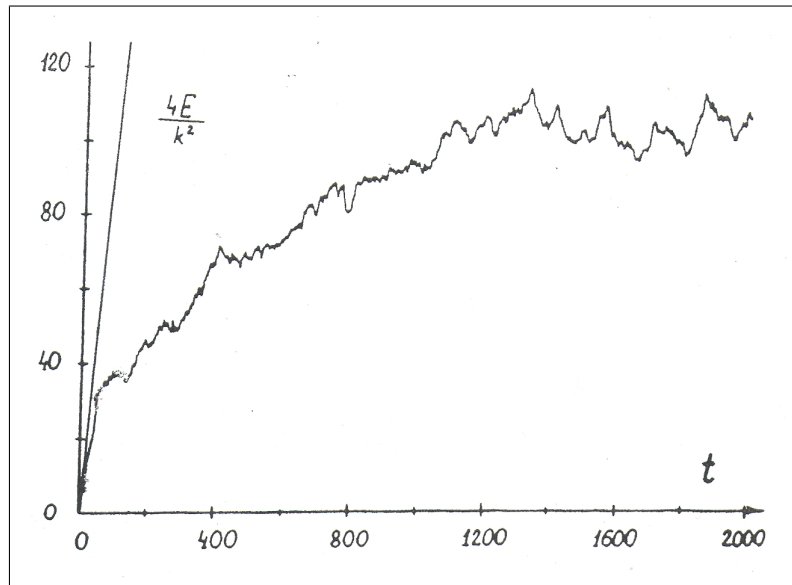
teljesül. Kaotikus esetben, amikor feltehetjük, hogy az egyes ϑ_i szögelfordulások korrelálatlanok, ez egy diffúziót ír le. Eszerint a klasszikus, henger alakú fázistéren definiált modell impulzusmomentumának várható értéke

$$\langle P_t^2 \rangle \sim \frac{1}{2} K^2 t \quad (K \gg 1) \quad (3)$$

Az érdekesség az, hogy e diffúzió a kvantum-rugdosott rotátor „szemiklasszikus” régiójában (vagyis, ahol $k \gg 1$ és $\tau \ll 1$) nem figyelhető meg [4], pontosabban, az impulzusmomentum várható értéke eleinte (3) szerint alakul, majd egy véges t^* idő után szaturál. Ez a t^* idő annál rövidebb, minél kisebb k értéke, és egy bizonyos k_{cr} kritikus érték alatt a korrespondencia meg sem jelenik. Ezt illusztrálja a 2. ábra.

Hogy tovább árnyaljuk a képet, vannak bizonyos „rezonáns” hullámfüggvények, amelyek mindig a klasszikus diffúziós viselkedést követik, ám ezek száma elenyésző. Itt kell megemlíteni, hogy mivel a klasszikus fázistér kevert (vagyis $0 < K < \infty$ esetén a fázistérnek egyszerre vannak kaotikus és integrálható régiói – igaz, utóbbiak, amint azt korábban már említettük, $K > 1$ esetén exponenciálisan tűnnek el), ezért a klasszikus rendszerben mindig találhatunk olyan „integrálható szigeteket”, ahol a diffúziós viselkedést nem figyelhetjük meg – habár ezek száma szintén elenyésző.

Végső soron azt látjuk, hogy a kvantummechanikai hatások „elfojtják” a káoszt, de meglepő módon a lokalizáció nem a „helykoordinátának” megfelelő szögelfordulásban, hanem az impulzusmomentumban jelenik meg; a rendszer dinamikai értelemben lokalizálódik.



2. ábra. A klasszikus és a kvantummechanikai hengeres fázisterű rugdosott rotátor diffúziós viselkedése. Jól látható a két görbe egyezése $t \ll 400$ esetén, majd a kvantumos diffúzió szaturálása. Az ábra forrása [5].

A. García-García és munkatársai rámutattak [6], hogy a klasszikus diffúzió viselkedés kvantummechanikai eltűnése (illetve a dinamikai lokalizáció) egy univerzális viselkedés következménye. Munkájuk során a dimenziótlan vezetés egy alternatív, a kvantumkaotikus rendszerek elméletéhez jobban illeszkedő definícióját keresték (e fogalmat mi később, a (12) egyenletben fogjuk definiálni – a mostani tárgyalást ez nem zavarhatja, hisz a továbbiakban ezzel a mennyiséggel nem fogunk foglalkozni). Végül a következő kifejezést vezették be:

$$g(L) = L^{\gamma_{cl}}, \quad \gamma_{cl} = \frac{d}{d_e} - \frac{2}{\beta},$$

ahol d a rendszer dimenziója, d_e és β pedig modelfüggő állandók: d_e az átlagos szinttávolság lineáris skálázódásával kapcsolatos (gyakran megegyezik a vizsgált modell Hausdorff-dimenziójával), míg β a vizsgált rendszer klasszikus megfelelőjének diffúziós kitevője $\langle p^2 \rangle = D_{cl} t^\beta$ szerint. Állításuk szerint az egyes kvantumkaotikus dinamikai rendszereket – feltéve, hogy a kvantummechanikai hatások nem változtatnak a klasszikus rendszer diffúziós tulajdonságain – a következő három univerzalitási osztályba sorolhatjuk:

- $\gamma_{cl} > 0$ esetén a spektrum szinttávolság-statisztikája a Wigner-Dyson eloszlást követi⁶, a sajátfüggvények pedig delokalizáltak.

⁶E fogalmak definíciói Függelékben találhatóak.

- $\gamma_{cl} < 0$ esetén a spektrum szinttávolság-statisztikája a Poisson-statisztikát követi⁶, a sajátfüggvények lokalizáltak momentum-térben. A kvantumrendszer tehát – a dinamikai lokalizáció következtében – diffúziómentes.
- $\gamma_{cl} = 0$ esetén a spektrum szinttávolság-statisztikája „egzotikus” viselkedést mutat (általában interpolál az előző két eset között valamilyen formában); a sajátfüggvények multifraktálok⁶.

Mivel a kvantummechanikai hatások (interferenciák) a diffúzió leromlásában mutatkoznak meg, ezért ha egy rendszer sajátállapotai a fenti besorolás alapján lokalizálódnak, akkor a kvantummechanikai módosítások figyelembevétele ezen a besoroláson nem fog változtatni. A (klasszikus) rugdosott rotátor diffúziója időben lineáris, ezért $\beta = 1$. Ugyanakkor a rendszert jellemző $d_e = 1$, így $\gamma_{cl} = -1$, ami a fentiek alapján megmagyarázza a kvantum-rugdosott rotátor dinamikai lokalizációját.

1.4. Anomális rugdosott rotátor

Az (1) által definiált modell általánosítása az alábbi Hamilton-függvény

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\theta} p^2 + \delta_T(t) f(\vartheta), \quad (4)$$

ahol a $f(\vartheta) = V \cos \vartheta$ helyettesítés adja az eredeti „rugdosott rotátort”. A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy mi történik, ha $f(\vartheta)$ -t a következő, α -függő módon definiáljuk [7]:

$$f_\alpha(\vartheta) = \begin{cases} \epsilon |\vartheta|^\alpha, & \alpha \neq 0, \quad \alpha \in [-1, 1] \\ \epsilon \ln |\vartheta|, & \alpha = 0 \end{cases} \quad (5)$$

[6] szerint $\alpha > 0,5$ esetén a diffúzió „normális”, azonban $-1 < \alpha < 0,5$ esetén a klasszikus impulzumomentum momentumai a $\langle p^k \rangle \sim p^{(1-\alpha)k}$ alakot követik, vagyis $\beta = 2 - 2\alpha$, így

$$\gamma_{cl} = -\frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

Eszerint $\alpha > 0$ esetén a sajátfüggvények lokalizálódnak, míg $\alpha < 0$ esetén delokalizált sajátállapotok lesznek (utóbbi esetben a klasszikus diffúzió anomaliája, illetve β konkrét értéke miatt a kvantumkorrekciók nem változtatnak az univerzalitási osztályon [6]).

$\alpha = 0$ esetén a sajátállapotok multifraktálok, a szinttávolság-statisztika pedig s kis értékeire lineárisan növekszik, míg s nagy értékeire exponenciálisan tűnik el. Emellett ekkor a Dyson-Mehta statisztika aszimptotikusan lineáris, oly módon, hogy a spektrális kompresszibilitás 0 és 1 közé essen.

Megmutatható [7], hogy a fent említett anomális diffúzió szigorúan kötődik a szinguláris potenciálhoz. Ha az eredeti potenciál helyett az $f'_\alpha(\vartheta) = \epsilon (|\vartheta| + b)^\alpha$, $b > 0$

potenciál választásával kiküszöböljük a szinguláris viselkedést, a diffúzió ismét „normálissá” válik. Ezzel szemben a diffúzió anomalitása akkor is megmarad, ha az eredeti potenciálhoz hozzáadunk egy tetszőleges (sima) perturbáló potenciált.

E rendszert, pontosabban, annak szinttávolság-statisztikáját – numerikus szimulációk sorozatával – részletesebben is megvizsgáltuk. Ehhez kiindulásképpen a rendszer egyetlen periódusára vonatkoztatott propagátorának [6]-ban megadott, momentum-térben kifejtett mátrixát használtuk (itt és a továbbiakban $\hbar = 1$):

$$\langle m | \mathbf{U} | n \rangle = \frac{1}{N} e^{-2\pi i \beta n^2} \sum_{\ell = -\frac{1}{2}(N-1)}^{\frac{1}{2}(N-1)} e^{i\phi_{\ell,m,n}}, \quad (6)$$

$$\beta = [T], \quad \phi_{\ell,m,n} = \frac{2\pi}{N} (m-n)(\ell + \theta) - i f \left(\frac{2\pi}{N} (\ell + \theta) \right),$$

ahol $0 \leq \theta \leq 1$ egy, a határfeltételt leíró paraméter, f pedig az (5)-ben szereplő potenciál. Előbbi paraméterre azért van szükség, mert az „eredeti” rendszer fázistere nem véges, ellenben a propagátor mátrixának „végessé csonkított” változata nem unitér, így a numerikus szimulációkhoz az „eredeti” hengeres fázisteret [6]-ban egy tóruszá alakították. θ azt mutatja meg, hogy ez a „tóruszá alakítás” hogyan történjen. $\theta = 0$ írja elő a periodikus határfeltételt. Ilyenkor a paritás egy jó kvantumszám lesz, ezért ekkor az eltérő paritású állapotokat külön esetekként kell kezelni.

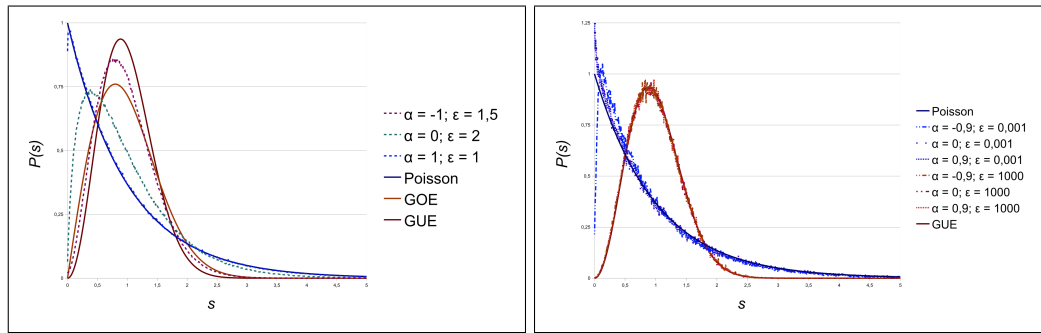
Megjegyezzük, hogy annak ellenére, hogy több cikk is a (6) kifejtésből indul ki, az így leírt mátrix nem unitér⁷. Egy nyilvánvaló sajtóhibáról van szó $\phi_{\ell,m,n}$ -ben. A helyes alak:

$$\phi_{\ell,m,n} = \frac{2\pi}{N} (m-n)(\ell + \theta) - f \left(\frac{2\pi}{N} (\ell + \theta) \right)$$

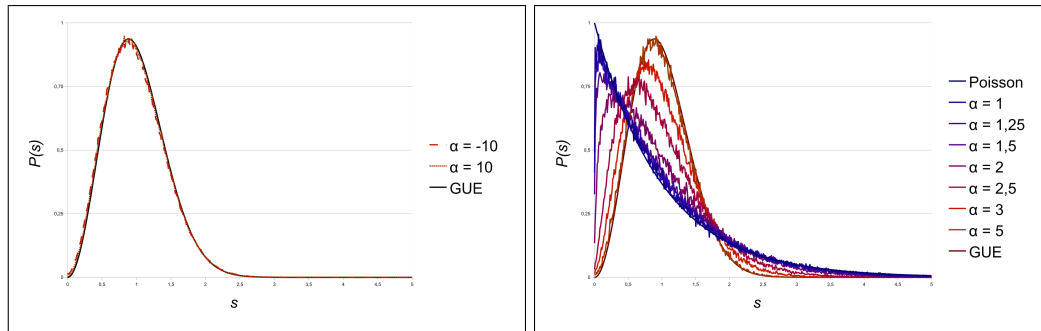
Mivel az egyetlen periódusra vonatkozó $\mathcal{U}\psi_n = e^{-i\kappa_n}\psi_n$ Schrödinger-egyenlet a κ_n kvázienergiákon keresztül írja le a rendszert, így a szinttávolság-statisztika kiszámolásához e kvázienergiákat kellett meghatároznunk, melyet a (6) mátrix diagonalizálásával értünk el. A publikált eredmények reprodukálásán túl (lásd a 3. ábra bal oldalát) néhány érdekességet is találtunk. $\epsilon \ll 1$ esetén a szinttávolság-statisztika α tetszőleges értékére a Poisson-eloszláshoz tart. Ez nem olyan meglepő, hiszen $\epsilon = 0$ esetén a potenciál tetszőleges α mellett eltűnik, a kölcsönhatásmentes rendszer szinttávolság-statisztikája pedig mindig Poisson. $\epsilon \gg 1$ esetén a szinttávolság-statisztika általában a Wigner-Dyson statisztikát közelíti, szintén α -tól függetlenül (lásd a 3. ábra jobb oldalát), ami hasonló okokra vezethető vissza, mint a „klasszikus” rugdosott rotátor viselkedése extrém nagy rúgási állandók esetén.

Vizsgálatainkat kiterjesztettük az $|\alpha| > 1$ tartományra is, melyet az eredeti cikkek már nem vizsgáltak. Azt tapasztaltuk, hogy $|\alpha|$ kellően nagy értékei mindig Wigner-Dyson statisztikát eredményeznek, α előjelétől függetlenül. További érdekesség, hogy

⁷Ez elemi számolással igazolható.



3. ábra. Az anomális rugdosott rotátor szinttávolság-statisztikái. Bal: delokalizált ($\alpha = -1, \epsilon = \frac{3}{2}, N = 1999$), lokalizált ($\alpha = 1, \epsilon = 1, N = 2011$) és kritikus ($\alpha = 0, \epsilon = 2, N = 2003$) állapotok⁸. Sajnos a delokalizált esetet nem sikerült pontosan reprodukálni ($\alpha = -1$ esetén GOE viselkedés várható), de az eredmény így is Wigner-Dyson alakú. Jobb: extrém viselkedés ϵ kis ($\epsilon = 10^{-3}$) és nagy ($\epsilon = 10^3$) értékei esetén.



4. ábra. Az anomális rugdosott rotátor szinttávolság-statisztikái $|\alpha| > 1$ esetén. Bal: $\alpha = -10, \epsilon = 3, N = 1511$ és $\alpha = 10, \epsilon = \frac{5}{2}, N = 1499$. Jobb: Lokalizált–delokalizált átmenet ($N = 349, \epsilon = 2$).

míg $\alpha = -1$ esetén a később bevezetendő, úgynevezett „GOE” statisztikát láthatjuk, addig $|\alpha| \gg 1$ mellett – a szintén később tárgyalandó – „GUE” statisztikát kapjuk. Ráadásul, mivel $\alpha = 1$ esetén a rendszer Poisson-statisztikát követ, ezért $1 < \alpha$ esetén egy újabb átmenetet figyelhetünk meg a lokalizált és a delokalizált állapotok között. Tapasztalatainkat a 4. ábra összegzi.

Pár szót érdemes szólni az $|\alpha| \ll 1$ esetről is. Mivel ekkor $|\vartheta| \neq 0$ esetén $\epsilon |\vartheta|^\alpha \approx \epsilon$, ezért $\alpha \neq 0$ mellett a szabad részecskékre vonatkozó Poisson-eloszlást várjuk (hisz egy konstans potenciál jelenlétére a szinttávolság-statisztika nem érzékeny). Ezt szimulációink során mi is megtapasztaltuk.

⁸A közölt ábrák eltérő rendszerméret mellett készültek, alátámasztandó García-García és munkatársainak azon állítását, hogy eredményeik nem függenek a rendszermérettől.

1.5. Intervallum-felcserélő leképezés

Giraud és munkatársai egy olyan modellt ismertettek [8], melyet (a Standard leképezéshez hasonlóan) az $1 + 1$ dimenziós tóruszon ($\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$) definiálták:

$$\Phi_f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 : \quad \begin{pmatrix} p_{t+1} \\ q_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_t + f(q_t) \\ q_t + 2(p_t + f(q_t)) \end{pmatrix}$$

Ez nagyban hasonlít az előzőekben látottakhoz, hiszen ez sem más, mint egy szabad időfejlődés és egy „rúgás” kombinációja:

$$\Phi_f = \Phi_0 \circ \rho_f$$

$$\Phi_0 : \begin{pmatrix} p_{t+1} \\ q_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_t \\ q_t + 2p_t \end{pmatrix} \quad \rho_f : \begin{pmatrix} p_{t+1} \\ q_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_t + f(q_t) \\ q_t \end{pmatrix}$$

A leképezés kvantálásához Φ_0 és ρ_f kvantálásán keresztül vezet az út. Az eredeti cikkben az általános $f(q)$ erőt egy α konstanssal helyettesítve, momentum-reprezentációban a következő unitér időfejllesztő operátort kapták:

$$\mathbf{U}_{p',p} = \begin{cases} \frac{1}{N} e^{i\phi_{p'}} \frac{1 - \exp(2\pi i N \alpha)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi i (p - p' + N \alpha)}{N}\right)}, & N \alpha \notin \mathbb{Z} \\ e^{i\phi_{p'}} \langle p' | p + N \alpha \rangle, & N \alpha \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (7)$$

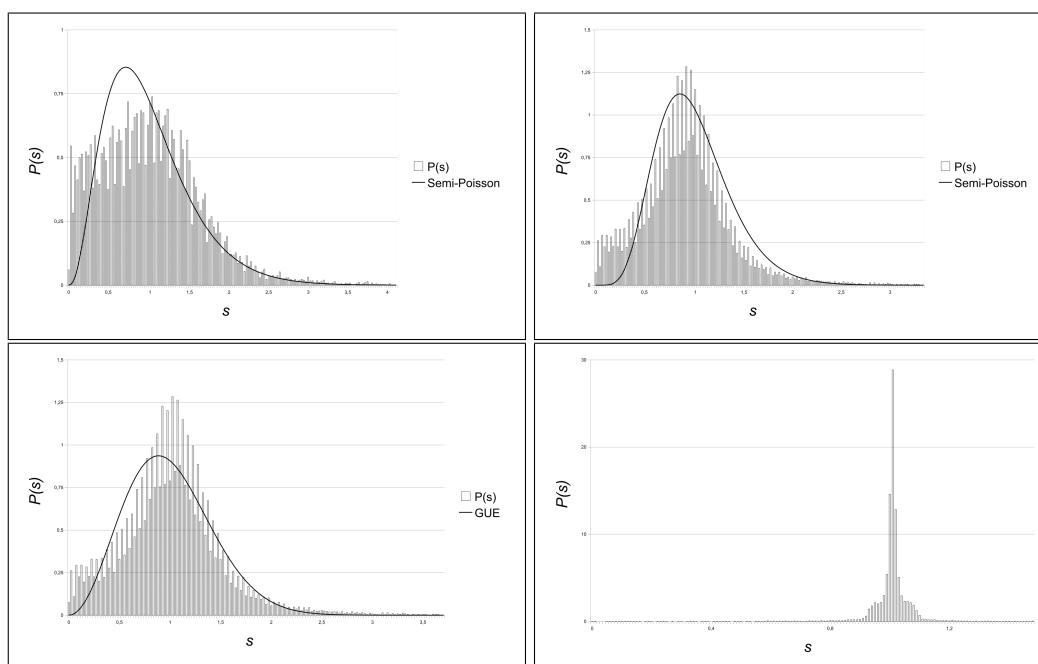
$$\phi_{p'} = -\frac{2\pi p'^2}{N}$$

Ennek az unitér időfejllesztő operátornak az $\{\exp(i\theta_j)\}$ alakú sajátértékeit vizsgáljuk, pontosabban, az ezekből adódó $\{\theta_j\}$ sajátfázisokat. Két esetet érdemes megkülönböztetni: a „nemszimmetrikus esetben” minden $\phi_{p'}$ független, míg a „szimmetrikus esetben” $\phi_{p'} = \phi_{N-p'}$, ha $p' > \frac{N}{2}$. Ekkor, ha α irracionális, a szimmetrikus (nemszimmetrikus) esetben nagy N esetén a szintstatisztika a COE (CUE) sokaság szintstatisztikáját követi (e sokaságokat a következő fejezetben fogjuk definiálni). Ha viszont α racionális (nem egész), a leképezés egy intervallum-felcserélő leképezéssé fajul. Ekkor $\alpha = \frac{n}{m}$ esetén (n, m relatív prímek), ha $N \rightarrow \infty$ úgy, hogy közben $mN \equiv \pm 1 \pmod{n}$, a fázisok szintstatisztikája az ún. semi-Poisson [9, 10] eloszlást követi:

$$P_\beta(s) = A_\beta s^\beta e^{-(\beta+1)s}, \quad A_\beta = \frac{(\beta+1)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)}$$

Itt β funkcióját tekintve az univerzalitási indexhez hasonlít,

$$\beta = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & \text{szimmetrikus esetben} \\ n - 1, & \text{nemszimmetrikus esetben} \end{cases}$$



5. ábra. Az intervallum-felcserélő leképezés szinttávolság-statisztikái. Felső sor: $\alpha = \frac{1}{7}$; szimmetrikus $N = 127$ (bal), nem szimmetrikus $N = 811$ (jobb). Alsó sor: $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, nem szimmetrikus esetek; $N = 419$ (bal), $N = 233$ (jobb). Figyeljük meg a jobb alsó ábrán a $P(s)$ függvény „lokalizálódását”! Itt $[N\alpha] \approx 0,0019 \ll 0,0655 = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

A semi-Poisson eloszlás legérdekesebb tulajdonsága, hogy s kis értékeire hasonlóan indul a (20) Wigner surmise eloszláshoz, míg s nagy értékeire a (21) Poisson-eloszlásba simul bele. Megjegyezzük, hogy a szinttávolság-statisztika az általánosabb n -szint-statisztika⁹ speciális alakja [10] $n = 1$ esetére:

$$p_{\beta,n}(s) = A_{\beta,n} s^{n(\beta+1)-1} e^{-(\beta+1)s}, \quad A_{\beta,n} = \frac{(\beta+1)^{n(\beta+1)}}{\Gamma(n\beta+1)}$$

Fontos kiemelni, hogy a semi-Poisson statisztika megjelenése szigorúan kötődik az $\alpha = \frac{n}{m}$ és $mN \equiv \pm 1 \pmod{n}$ feltételekhez. Ha például α irracionális és $N\alpha$ távolsága a hozzá legközelebb eső egész számtól legfeljebb $\frac{1}{\sqrt{N}}$ nagyságrendű, a szintstatisztika-függvény egy szűk tartományra lokalizálódik [8]. E viselkedést numerikus szimulációink során mi is tapasztaltuk, amint arról az 5. ábra is tanúskodik.

A leképezés további vizsgálata számos meglepetéssel szolgált. [11] bizonyította, hogy a mátrixsokaság sajátfüggvényei rendelkeznek a multifraktál tulajdonsággal. A D_q multifraktál-kitevők, ahogy az m számláló növekszik, úgy q -tól függetlenül 1-hez

⁹Ez a függvény annak a sűrűségfüggvénye, hogy adott intervallumon belül pontosan n szint található.

tartanak (ez várható abból is, hogy $m \rightarrow \infty$ esetén α egy irracionális számhoz fog tartani, amikor is – ahogy arra már utaltunk – a rendszer „egzotikussága” elvész). Ennél fontosabb eredmény, hogy $q \approx 0$ esetén

$$D_q \approx 1 - \frac{q}{m}$$

Másik érdekesség a spektrális kompresszibilitás. Racionális (nem egész) α esetén ugyanis különböző értékek adódnak annak függvényében, hogy a termodinamikai limeszt hogyan vesszük: olyan N -eken keresztül, melyek prímek, olyanokon keresztül, melyek prímek kétszeresei, vagy olyanokon keresztül, melyek prímek konstansszorosai (ahol a konstans egy páratlan prím). Az eredmény¹⁰ [8]:

$$\chi \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Sigma^2(N)}{N} = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{ha } N \text{ prím} \\ \frac{2}{\text{lcm}(2,m)}, & \text{ha } \frac{N}{2} \text{ prím} \\ \frac{1}{m} + \frac{\rho-1}{\text{lcm}(\rho,m)}, & \text{ha } \frac{N}{\rho} \text{ és } \rho \text{ páratlan prím} \end{cases} \quad (8)$$

Emlékezzünk, hogy a spektrális kompresszibilitás azt mutatja meg, hogy egy rendszer mennyire korrelált. Érdeemes megjegyezni, hogy a fenti értékek mind 0 és 1 közé esnek.

A leképezés megvalósítható kvantum-számítógépen [12], mégpedig $N = 2^{n_q}$ dimenziós Hilbert-tér esetén pontosan $2n_q^2 + 2n_q$ kapu segítségével (melyek közül pontosan $2n_q^2 - n_q$ darab két-qubit kapu). Ez kevesebb bármely más leképezés kapuigényénél (kivételesen ez alól a „kvantum baker leképezés”, az egyetlen, ami a mai napig valóban megépült [13]). A várakozás az, hogy a leképezés mint szubrutin válhatna hasznosá bonyolultabb feladatokban, többek között Wigner- vagy Husimi-sűrűségfüggvények mérésekor [14, 15], illetve a hűség (mely fogalmat az utolsó fejezetben vezetjük be) tanulmányozása során [16, 17].

A modell tehát számos előnnyel bír és igen egzotikus tulajdonságai vannak (multi-fraktál sajátvektorok, semi-Poisson szintstatistika stb.). A leképezés alaposabb vizsgálata során azonban rájöttünk, hogy az több lényeges problémát is felvet. A legfontosabb, hogy a rendszernek nincs „termodinamikai limesze”¹¹, legalábbis olyan értelemben, hogy a mennyiségek többsége nem definiálható az $N \rightarrow \infty$ limeszben, csak N bizonyos részsorozatai esetén, lásd pl. (8) – vagyis egy adott makroszkopikus mennyiség értéke attól függne, hogy miként válik a rendszer makroszkopikussá, ami fizikailag abszurdum¹². A másik jelentős probléma, hogy mivel a leképezés tulajdonságai alapvetően múlnak α racionális vagy irracionális voltán, eléggé nehéz lenne bármilyen közvetlen megfeleltetést tenni a leképezést jellemző α és egy valódi fizikai modell bármely

¹⁰Az lcm kifejezés az angol *least common multiple* (legkisebb közös többszörös) rövidítése.

¹¹Mely jelen esetben inkább a „klasszikus megfelelőt” jelenti, mintsem a makroszkopikus méretűre felduzzasztott rendszert.

¹²Ez persze nem teljesen igaz. Rácsok esetén, ahol az $N \rightarrow \infty$ határátmenet során N sokszor valamilyen speciális alakot kénytelen felvenni (például egy egy dimenziós, két atomos molekulából álló rácsnál egyetlen atomot tekintve „részcskének” $N = 2k$), megeshet, hogy egy adott kvantum mennyiség

paramétere között. E kétségek arról győztek meg minket, hogy e rendszerrel leginkább számelméleti érdekességként érdemes foglalkozni.

Végezetül a téma iránt mélyebben érdeklődő olvasó számára megjegyezzük, hogy [18] matematikailag teljesen kimerítően tárgyalja a leképezés spektrális tulajdonságait.



Az eddigiek során három olyan fizikai modellel ismerkedtünk meg, amelyek integrálható és kaotikus fázissal egyaránt rendelkeznek, s megfigyeltük, hogy e modellek főbb spektrális jellemzőire milyen hatást gyakorol a káosz. Külön említést érdemel, hogy a kvantummechanikai tárgyalás keretében e rendszerek némelyike olyan tulajdonságokat mutat fel (ilyen például a rugdosott rotátor dinamikai lokalizációja), melyek a klasszikus határátmenet során teljesen eltűnnek.

Láthattuk, hogy bizonyos jellemzők tekintetében univerzális viselkedést tapasztalunk (mint például a klasszikus diffúziós tulajdonságok és a sajátfüggvények lokalizáltsága között). Felmerül a kérdés, hogy hogyan találhatnánk meg egy-egy univerzális viselkedés pontos feltételeit, illetve hogyan írhatnánk le ezeket a törvényszerűségeket úgy, hogy azok a kvantum-kaotikus modellek lehető legtágabb halmazára értelmezhetőek legyenek? A következő fejezetben ezért egy olyan módszert mutatunk be, melyet a kvantumkaotikus rendszerek analízise során gyakran használnak, és ami az egyes modellek alapvető szimmetriatulajdonságai alapján képes az adott rendszer főbb jellemzőit – statisztikai értelemben – megjósolni.

termodinamikai limesze valóban függ attól, hogy az $N \rightarrow \infty$ határátmenet során a természetes számok milyen részhalmazát járjuk be. Ám ebben a konkrét esetben N valamilyen prímszámsorozat többszöröse, s nehéz elképzelni, hogy milyen valós fizikai háttér motiválhatná egy ilyen sorozat alkalmazását a határátmenet során.

2. Véletlen mátrix elmélet

Amikor Wigner Jenő különböző nehéz ionok ütközéseit vizsgálta, azzal kellett szembesülnie, hogy az egzakt megoldások megtalálásához kezelhetetlenül sok egyenletet és paramétert kell figyelembe vennie, miközben e paraméterek többsége az eredményeket csak a statisztikai átlagolás erejéig módosítja. Ez késztette arra 1951-ben, hogy az atomi Hamilton-operátorok konkrét felírása helyett olyan megoldást keressen, amely az eredeti problémával statisztikailag azonos eredményre vezet, mégis könnyebben kezelhető analitikusan. Ez a véletlen mátrixok elméletének [19] (*Random Matrix Theory* — RMT) alapgondolata: egy rendszert annak globális tulajdonságai (szimmetriái) alapján egy olyan „redukált” rendszerrel helyettesítünk, melynek statisztikai tulajdonságai az eredetivel megegyeznek, de a rendszerben fellépő kölcsönhatásokat az eredeti kölcsönhatások egzakt meghatározása helyett megfelelő módon parametrizált véletlen eloszlásokból merítjük. E „véletlen rendszer” Hamilton-operátorának mátrixa nyilvánvalóan egy „véletlen mátrix” lesz, s aszerint, hogy milyen tulajdonságokat támasztottunk a modellezett rendszerrel szemben, ezeket a véletlen mátrixokat különböző sokaságokba sorolhatjuk. Eszerint egy véletlen mátrix sokaság nem más, mint egy adott fizikai rendszer megfelelője a véletlen mátrixok elméletében¹³.

2.1. Alapvető sokaságok

A véletlenmátrix-sokaságok mátrixelemeinek várható értéke jellemzően nulla szokott lenni, ugyanis a nem-zérus várható érték csak egy eltolást jelent a spektrumban, ami a mátrixok általános jellemzése szempontjából érdektelen. Ebből következően a mátrixokat az ún. „sávprofil” (*band profile*) megadásával írjuk le, mely az egyes elemek szórását mondja meg.

Az itt következő állítások többsége megtalálható bármely, a témával foglalkozó könyvben [20, 21].

2.1.1. Gauss-sokaságok

Az irodalomban talán legelterjedtebb sokaságot a következő két feltétel generálja:

1. Ha a \mathbf{H} mátrix sűrűségfüggvénye $P(\mathbf{H})$, akkor a $P(\mathbf{H}) d\mathbf{H}$ kifejezés („Haarmérték”) legyen invariáns a „megfelelő” hasonlósági transzformációval szemben és
2. a (lineárisan független) mátrixelemek legyenek független valószínűségi változók.

¹³Itt a rendszer „adott”-sága pontosan annyit jelent, amennyit megadtunk belőle. Ha például csak annyit tudunk, hogy az általunk vizsgált rendszer időtükrözésre invariáns, akkor az általunk kapott véletlen mátrix sokaság minden olyan véletlen mátrixot tartalmaz, ami időtükrözés-invariáns fizikai rendszereket modellez (ami persze – köznapi értelemben – korántsem jelent egy „adott rendszert”).

A fenti feltételeknek a

$$P(\mathbf{H}) = \frac{1}{Z} e^{-a \operatorname{tr}^2 \mathbf{H} - b \operatorname{tr} \mathbf{H}}$$

alakú sűrűségfüggvény tesz eleget. Ez tehát egy olyan mátrix, melyre σ_{ij} konstans (a diagonális elemek szórása e konstans $\sqrt{2}$ -szerese). Matematikai érdekesség, hogy amennyiben a mátrixelemek statisztikai függetlenségét nem kötjük ki, csak a szimmetriakövetelményeket, úgy az exponensben $\operatorname{tr} \mathbf{H}$ tetszőleges polinomját írva helyes megoldáshoz jutunk [22]. További érdekesség, hogy a szimmetriakövetelmények elhagyásával és pusztán a függetlenség előírásával olyan sokaságokat kapunk, amelyek nyomokban emlékeztetnek a Gauss-sokaságokra (például az állapotsűrűségük ugyanazt a – később tárgyalandó – „félkör-szabályt” követik).

Aszerint, hogy $P(\mathbf{H}) d\mathbf{H}$ a valós ortogonális, az unitér vagy a szimplektikus transzformációkra invariáns, megkülönböztetjük a GOE (*Gaussian Orthogonal Ensemble*), GUE (*Gaussian Unitary Ensemble*) és GSE (*Gaussian Symplectic Ensemble*) sokaságokat. Az egyes sokaságok legáltalánosabb jellemzőit az 1. táblázat foglalja össze.

	Mátrixelemek alaphalmaza	Mátrixelemenkénti szabadsági fokok száma	Invarianciák
GOE	\mathbb{R}	1	időtüközés, spin-rotáció
GUE	\mathbb{C}	2	—
GSE	\mathbb{Q}	4	időtüközés

1. táblázat. A Gauss-sokaságok legjellemzőbb vonásai

Másik fontos vonása a Gauss-sokaságoknak, hogy – Balian tétele értelmében – maximalizálják az entrópiát [23], vagyis ha valóban csak az időtükrözéssel szemben való viselkedésről és a spinről van információnk, akkor ez a sokaság a legmegfelelőbb.

Megjegyezzük, hogy a fenti sokaságokkal két alapvető probléma fogalmazódott meg [22]:

1. Nem egyértelmű, hogy fizikailag mi motiválja a mátrixelemek függetlenségét.
2. Az átfedések súlyfaktorai nem azonosak, egyes átmenetek valószínűsége nagyobb, mint másoké.

Ezeket kiküszöbölendő Dyson bevezetett egy-egy unitér sokaságot, a cirkuláris sokaságokat (*circular ensembles*), melyek sajátértékei $e^{i\varphi_j}$ alakúak (φ_j -ben egyenletes eloszlással). Ezen mátrixok elsősorban szórási modellekben használatosak, és statisztikai tulajdonságaik (pl. a szinttávolság-statisztikáik stb.) általában megegyeznek a

nekik megfelelő Gauss-sokaságok megfelelő statisztikai tulajdonságaival. A Gauss-sokaságokhoz hasonlóan, a vizsgált modellek szimmetriái alapján definiálhatóak a COE, CUE és CSE sokaságok. Megjegyezzük, hogy a cirkuláris sokaságok tagjainak numerikus generálása korántsem triviális feladat [24]; ha \mathbf{H} egy Gauss-sokaságba tartozó véletlen mátrix, $e^{i\mathbf{H}}$ ugyan unitér lesz, de nem fog egyetlen cirkuláris sokasághoz sem tartozni.

2.1.2. Poisson-sokaság

A Gauss-sokaságok egyik legfőbb jellemzője az entrópia maximálása. Ez egyben azt is jelenti, hogy ez a család rendelkezik a „lehető legkorreláltabb” spektrummal. Ennek „ellentéte” az a sokaság, amelyben a spektrum korrelálatlan. Ez a tulajdonság definiálja a Poisson-sokaságot, melynek tagjai olyan diagonális mátrixok, melyek sajátértékei azonos eloszlású valószínűségi változók.

2.1.3. Sávmátrixok

Számos olyan, jelenleg is aktívan kutatott véletlen mátrix sokaság létezik, amelyeknek az alapja valamilyen sávmátrix.

A legegyszerűbb ilyen az a b sáv szélességű szimmetrikus¹⁴ mátrix, melyre

$$\sigma_{ij}^2 = \begin{cases} 1 + \delta_{ij}, & |i - j| \leq b \\ 0, & |i - j| > b \end{cases}$$

Látható, hogy fix N mellett a $b \rightarrow N$ határesetben egy Gauss-, míg a $b \rightarrow 0$ határesetben egy Poisson-mátrixot kapunk.

Annak függvényében, hogy valós számokból, komplexekből vagy kvaterniókból építjük fel e mátrixokat, beszélhetünk valós, komplex és szimplektikus sávmátrixokról.

Fontos speciális eset az úgynevezett PBRM (*Power-Law Banded Random Matrix*) sokaság [25], melynek sávprofilja

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{|i-j|}{b}\right)^{2\alpha}} + \delta_{ij}$$

E modell felfogható úgy, mint egy olyan kvázi-egy dimenziós rács, melyben a rács-pontok közötti átfedés véletlenszerű, ám hosszú távú (az átfedési integrál hatványfüggvény szerint cseng le). Könnyen látható, hogy termodinamikai határesetben erre a mátrixra is igaz, amit az egyszerű sávmátrixról mondtunk b szélső értékeire.

¹⁴A szimmetrikusság annak a hallgatólagos kritériumnak a következménye, hogy olyan mátrixokat keresünk, amelyek valamilyen fizikai mennyiségnek megfelelő operátort – általában a Hamilton-operátort – reprezentálnak.

E mátrixcsalád legérdekesebb tulajdonsága [26], hogy spektrumának, illetve sajátfüggvény-rendszerének struktúrája az α paraméter függvényében gyökeresen képes változni: $\alpha < 1$ esetén „delokalizált”, míg $\alpha > 1$ esetén „lokalizált” viselkedés jellemzi. Az $\alpha = 1$ eset a sokaság kritikus pontja (b minden lehetséges értékére, vagyis itt tulajdonképpen „kritikus vonalról” beszélhetünk); ekkor a sajátfüggvények multifraktálok. A gyakorlati szempontból legfontosabb multifraktál-kitevő, D_2 értéke b függvényében [27]

$$D_2(b) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\pi b}, & b \gg 1 \\ 2b, & b \ll 1 \end{cases} \quad (9)$$

Megjegyezzük, hogy b függvényében általánosságban is két fontos határesetet különböztethetünk meg: $b \ll 1$ az ún. „gyenge multifraktalitás”, míg $b \gg 1$ az „erős multifraktalitás” tartománya.

Amennyiben külön nem emeljük ki, a továbbiakban PBRM-sokaság alatt azokat a valós PBRM mátrixokat fogjuk érteni, amelyekre $\alpha = 1$.

2.2. Statisztikák

Ahogy az már a bevezetőből is kiderülhetett, véletlen mátrixokat akkor érdemes használni, ha egy nagy (makroszkopikus számú részecskét tartalmazó) rendszert jellemző különböző mennyiségeket szeretnénk kiszámolni. A következőkben főleg a Poisson- illetve Gauss-sokaságok legfontosabb statisztikai jellemzőit vizsgáljuk, de néhány esetben a PBRM-sokaságra vonatkozó eredményeket is ismertetjük.

Elsőként meghatározzuk az egyes sokaságok univerzalitási indexét (16) alapján. A Poisson-sokaságban a szabadsági fokok száma megegyezik a mátrix rangjával, így $\beta = 0$. Gauss-sokaságok esetén könnyű belátni, hogy β megegyezik a mátrixelemenkénti szabadsági fokok számával. Ez GOE esetén 1 (valós szám), GUE esetén 2 (komplex szám, vagyis 2 független valós szám), GSE esetén pedig 4 (a szimplektikus csoport elemeit, melyek a kvaterniókkal izomorfak, 4 független valós szám jellemzi). A PBRM-sokaság univerzalitási indexe 1^{15} .

A statisztikai jellemzők levezetésének alapja a szintek együttes eloszlásfüggvényének ismerete. Ezt $N \times N$ -es Gauss-mátrixokra a

$$p_{N,\beta}(\{\varepsilon_i\}) = C_{N,\beta} \exp \left[-\beta \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 - \sum_{i<j}^N \ln |\varepsilon_i - \varepsilon_j| \right) \right] \quad (10)$$

kifejezés adja. Ha úgy tetszik, ez olyan, mint ha a szintek egy egydimenziós klasszikus töltésrendszer töltései lennének, az együttes eloszlásfüggvény a „partíciós függvényük”, míg az univerzalitási index az inverz hőmérséklet szerepét játssza.

A továbbiakban az N és a β indexeket elhagyjuk.

¹⁵A komplex PBRM mátrixok univerzalitási indexe 2, a szimplektikusoké 4.

Gauss-mátrixok esetén p a (10) kifejezésben szereplő logaritmus miatt szinguláris lesz, ha bármely két ϵ_i energia megegyezik. Ezt „általánosítva” p -t (és az ebből képezhető R_k -t) elfajult esetekre nem értelmezzük.

Green-függvényes, vagy szuperszimmetrikus módszerekkel belátható, hogy egy $N \times N$ -es (tetszőleges) Gauss-sokaság állapotosűrűsége a

$$\rho(\epsilon) = \begin{cases} \frac{2N}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi\epsilon}{2N}\right)^2}, & |\epsilon| \leq \frac{2N}{\pi} \\ 0, & |\epsilon| > \frac{2N}{\pi} \end{cases}$$

kifejezést közelíti, melynek neve Wigner-féle félkör szabály [28].

A Poisson-sokaság állapotosűrűsége a Gauss-féle normális eloszlás. Ez a centrális határeloszlás tétel következménye. Emlékezzünk rá, hogy a Poisson-sokaság esetén annyit kötöttünk ki, hogy a diagonális elemek azonos eloszlású (de ezen belül tetszőlegesen megválasztott) valószínűségi változók legyenek. Ha történetesen magukat a diagonális elemeket is egy normális eloszlásból vesszük, akkor az állapotosűrűség is ez a normális eloszlás lesz. Emiatt a tulajdonság miatt elméleti és gyakorlati számításoknál gyakran Gauss-eloszlásokból vesszük a Poisson-sokaság elemeit.

Az egyes sokaságok Clustering-függvénye, illetve az ebből Fourier-transzformációval képezhető forma-faktora a következő¹⁶ (6. ábra):

$$Y_2(r) = \begin{cases} 0, & \beta = 0 \\ \text{sinc}^2(r) + \frac{d\text{sinc}(r)}{dr} \int_r^\infty \text{sinc}(r') dr', & \beta = 1 \\ \text{sinc}^2(r), & \beta = 2 \\ \text{sinc}^2(2r) - \frac{d\text{sinc}(2r)}{dr} \int_0^r \text{sinc}(2r') dr', & \beta = 4 \end{cases}$$

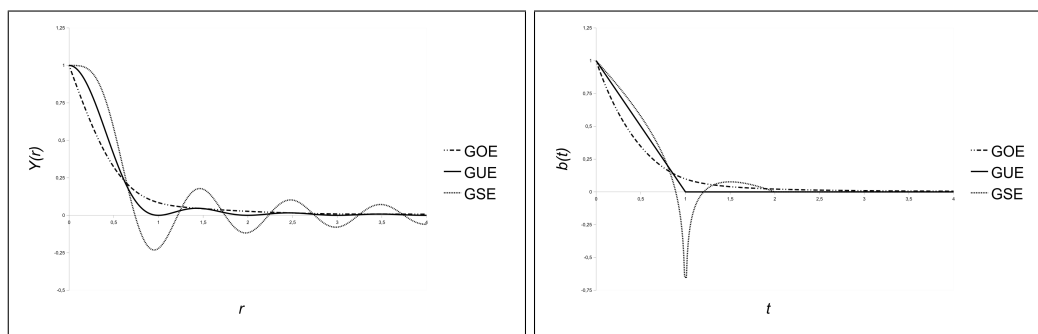
$$b_2(t) = \begin{cases} 0, & \beta = 0 \\ \left. \begin{array}{l} 1 - 2t + t \ln(2t + 1), & t \leq 1 \\ -1 + t \ln \frac{2t+1}{2t-1}, & t > 1 \end{array} \right\} & \beta = 1 \\ \left. \begin{array}{l} 1 - t, & t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{array} \right\} & \beta = 2 \\ \left. \begin{array}{l} 1 - \frac{t}{2} + \frac{\ln|t-1|}{4}, & t \leq 2 \\ 0, & t > 2 \end{array} \right\} & \beta = 4 \end{cases}$$

A párkorrelációs függvény a PBRM-sokaságnál a multifraktalitás erősségének függvénye [26]:

$$R_2(s) = \begin{cases} \delta(s) - \text{sinc}^2(s) \frac{\left(\frac{\pi s}{4b}\right)^2}{\sinh^2\left(\frac{\pi s}{4b}\right)}, & b \gg 1 \\ \delta(s) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{|s|}{2\sqrt{\pi b}}}^\infty e^{-t^2} dt, & b \ll 1 \end{cases}$$

A kétféle eloszlást jellemző szintszámosság-szórás, illetve Dyson-Mehta statisztika, valamint az ezekből származtatható spektrális kompresszibilitás a következő formulákat követi:

¹⁶Itt $\text{sinc } x \equiv \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.



6. ábra. A Gauss-sokaságok Clustering-függvényei és forma-faktorai.

	Gauss	Poisson
$\Sigma_{\beta}^2(L)$	$\sim \ln L$	L
$\Delta_{3,\beta}(L)$	$\sim \ln L$	L
χ_{β}	0	1

PBRM mátrixok spektrális kompresszibilitása a Gauss- és a Poisson-sokaságok között mozog aszerint, hogy a gyenge, vagy az erős multifraktalitás tartományában vizsgálódunk [26]:

$$\chi(b) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi b}, & b \gg 1 \\ 1 - 4b, & b \ll 1 \end{cases}$$

Megmutatható, hogy a sajátállapotok eloszlásfüggvénye Gauss-sokaságokra független a spektrumtól:

$$p_{\beta}(y \equiv \psi_i^2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} \frac{(1-y)^{\frac{N-3}{2}}}{\sqrt{y}}, & \beta = 1 \\ (N-1)(1-y)^{N-2}, & \beta = 2 \\ (N-1)(N-2)y(1-y)^{N-3}, & \beta = 4 \end{cases}$$

A fenti formula rendszerméret-függése kiküszöbölhető az $\eta = yN$ változó bevezetésével. Ekkor a termodinamikai határesetben

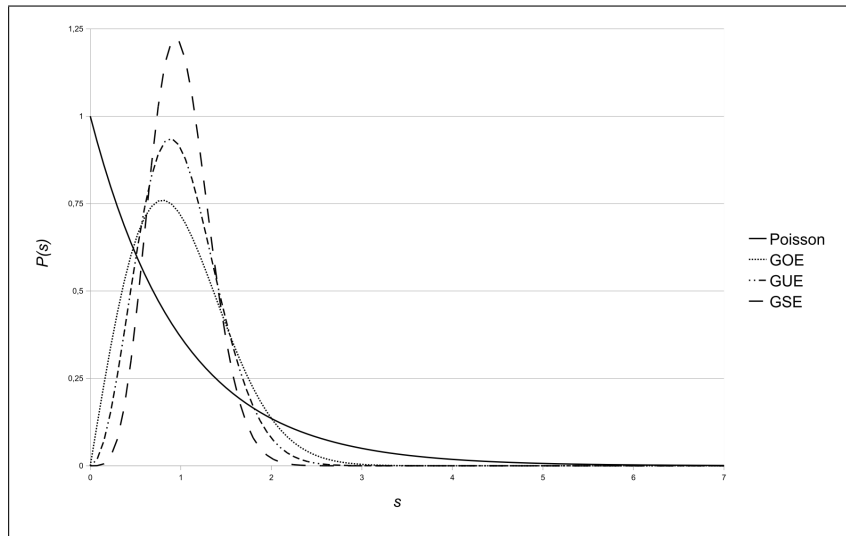
$$p_{\beta}(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} e^{-\frac{\eta}{2}}, & \beta = 1 \\ e^{-\eta}, & \beta = 2 \\ \eta e^{-\eta}, & \beta = 4 \end{cases}$$

Amint látható, ezek megegyeznek a megfelelő χ^2 eloszlásokkal:

$$p_{\beta}(\eta) = \chi_{\beta}^2(\eta)$$

A Függelékben beláttuk, hogy 2×2 -es GOE mátrixok szinttávolság-függvénye a (20) Wigner surmise. Belátható, hogy 2×2 -es GUE és a GSE mátrixok szinttávolság-statisztikája is ezt az alakot veszi fel:

$$P_{\beta}(s) = A_{\beta} s^{\beta} \exp(-B_{\beta} s^2), \quad (11)$$



7. ábra. A Poisson- és Gauss-sokaságok szinttávolság-statisztikája.

ahol A_β és B_β β -függő konstansok (értéküket a 2. táblázat mutatja). Sokszor ezt az általánosabb alakot hívják Wigner surmise-nak.

β	A_β	B_β
1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
2	$\frac{32}{\pi^2}$	$\frac{4}{\pi}$
4	$\frac{2^{18}}{3^6 \pi^3}$	$\frac{64}{9\pi}$

2. táblázat. A Wigner-eloszlások paraméterei.

Tetszőleges $N \times N$ -es Gauss-mátrixok szinttávolság-statisztikája szintén a (11) alakot közelíti, amennyiben a megfelelő A'_β és B'_β paraméterek mellett $P(s \rightarrow 0) \sim A'_\beta s^\beta$ és $P(s \rightarrow \infty) \sim \exp(-B'_\beta s^2)$. E statisztikát Wigner-Dyson statisztikának szokás nevezni.

Szintén a Függelékben láttuk, hogy Poisson mátrixok szinttávolság-függvénye (21) alakú. Ez a Poisson-sokaság „névadója”, a Függelékben leírt analógiának köszönhetően. A Poisson- és Gauss-sokaságok szinttávolság-statisztikáját a 7. ábra mutatja be.

A $P(s)$ függvényből látszik, hogy míg Poisson-sokaságra $s = 0$ esetén a sűrűség-függvény a legnagyobb értékét veszi fel ($P(0) = 1$), addig Gauss-sokaságokra a sűrű-

ségfüggvény itt zérus. Eszerint Poisson-rendszerekben a szintek „vonzzák” egymást, míg Gauss-rendszerekben „taszítják”, $s = 0$ esetén megfigyelhetjük a „korrelációs űrt” (*correlation hole*, ahogy a szakirodalom nevezi). Ugyanezt a viselkedést természetesen a már ismertetett $Y_2(r)$ statisztikákból is kiolvashatjuk.

A PBRM-sokaság szinttávolság-statisztikájára nem ismerünk analitikus formulát, ám a numerikus szimulációk arra engednek következtetni, hogy a szinttávolság-statisztika az előző fejezetben már említett semi-Poisson eloszlást követi [26].

2.3. Kapcsolat a kaotikus rendszerekkel

A véletlen mátrixok elméletének egyik legfontosabb kijelentése a Bohigas–Giannoni–Schmit (BGS) sejtés [29], mely azt mondja ki, hogy azon időtükrözés-invariáns kvantumrendszerek fluktuációi, melyek klasszikus határeseté kaotikus, a GOE sokasággal írhatóak le¹⁷. Habár számos olyan eset ismert, amikor a BGS sejtés nem teljesül (a legismertebb példák [6] az aritmetikus biliárdok, a Harper-modell vagy a már ismertetett rugdosott rotátor), számos (numerikus) kísérlet igazolta a sejtés helyességét¹⁸.

E sejtés „párja” a Berry–Tabor–Gutzwiller (BTG) sejtés¹⁹, ami hasonlót állít integrálható rendszerekről és a Poisson-sokaságról. E sejtést alátámasztandó, fontoljuk meg [6], hogy a Noether-tétel értelmében minden szimetriához tartozik egy megmaradó mennyiség, s hogy az integrálható rendszerek annyi megmaradó mennyiséggel bírnak, ahány dimenziósak. Kvantumrendszerekben ellenben minden megmaradó mennyiség egy „jó kvantumszám”, egy adott kvantumállapotot ezen kvantumszámok megadása jellemez, s mivel a különböző állapotokat különböző kvantumszámok írják le, az egyes állapotok korrelálatlanok lesznek. Eszerint ezen „jó kvantumszámok” terében felírva a rendszert a Hamilton-operátor mátrixa blokkdiagonális lesz.

Hogy egy példával rávilágítsunk e sejtések jelentőségére, vizsgáljuk meg a (4) és (5) egyenletekkel definiált anomális rugdosott rotátort! Láttuk, hogy $\alpha < 0$ esetén a sajátvektorok delokalizálódnak, míg $\alpha > 0$ esetén lokalizáltak lesznek. A fentiek alapján azt várjuk, hogy $\alpha < 0$ esetén a spektrum valamelyik Wigner-Dyson, míg $\alpha > 0$ esetén a Poisson-sokaságra jellemző tulajdonságokat fogja mutatni. Kimutatható [6], de saját

¹⁷A sejtés a GUE és GSE sokaságokra is kiterjeszthető, a feltételezés szerint előbbi az időtükrözésre nem invariáns, utóbbi az időtükrözés-invariáns – ám spinrotációra nem invariáns – rendszerek fluktuációit írja le.

¹⁸Reményeink szerint, ha a sejtést sikerülne bizonyítani, egyben kiderülne, hogy mik a pontos korlátai, ezáltal megérthetnénk, hogy az ismert kivételekre miért nem teljesül a sejtés. Jelenleg az tűnik biztosnak, hogy azokban a kvantumrendszerekben, amelyekben az erős interferencia-effektusok miatt a hullámfüggvények lokalizálódnak, akár valós, akár momentum-térben (ez történik például a rugdosott rotátor esetében is) és ezáltal a diffúziós viselkedés eltér a klasszikus határeset diffúziójától, a BGS sejtés nem teljesül.

¹⁹A sejtést [30] írja le [31] alapján.

szimulációinkból is világosan látszik (lásd a 3. ábrát), hogy várakozásunk helyesnek bizonyul.

Egy másik példa a (7) időfejlesztő operátor által definiált intervallum-felcserélő leképezés. A kifejezésből természetes módon kreálhatunk egy véletlenmátrix-sokaságot [32], ha a $\phi_{p'}$ fázisokat véletlenszerűen választjuk a $[0; 2\pi]$ tartományból. Ahogy arra utaltunk, irracionális α esetén a szinttávolság-statisztikák valamelyik cirkuláris sokaság szinttávolság-statisztikáját követik. Saját szimulációink során mi is azt tapasztaltuk, hogy irracionális α esetén²⁰ az így definiált véletlenmátrix-sokaság szinttávolság-eloszlása jól közelíti a Wigner-Dyson statisztikát. Habár ez elsőre nem tűnik meglepőnek, az eredmény nem triviális: ne feledjük, hogy az eredeti rendszerben az egyes $\phi_{p'}$ fázisok egy determinisztikus időfejlesztés eredményeként jönnek létre, míg a véletlen modellben ezek teljesen korrelálatlanok.

Ami igazán érdekes, az az, hogy a BGS és BTG sejtésekhez hasonló analógia sejthető egyes kritikus állapotban levő (kvantum)rendszerek és bizonyos „kritikus” véletlenmátrix-sokaságok között. Utóbbi alatt olyan véletlenmátrix-sokaságot kell érteni, ahol a sokaság statisztikai jellemzői a sokaságot leíró valamelyik paraméter(ek) módosulásának hatására drasztikusan, strukturális jelleggel képesek megváltozni. Ilyen sokaság például a PBRM, ahol a sajátvektorok $\alpha < 1$ esetén delokalizáltak, $\alpha > 1$ esetén lokalizálódnak, $\alpha = 1$ esetén pedig multifraktál tulajdonságokat mutatnak.

A már említett intervallum-felcserélő leképezésből származtatott sokaság esetén az analógia nem túl meglepő (a véletlenmátrix-sokaság szinttávolság-eloszlása stb. pontosan megegyezik a determinisztikus kvantumrendszer megfelelő tulajdonságaival), hiszen az időfejlesztő operátor mátrixa nagyon hasonlít a véletlenmátrix-sokaság elemeire.

Annál érdekesebb analógia figyelhető meg a már említett anomális rugdosott rotátor és a PBRM sokaság egyes tulajdonságai között. Mindkét modell rendelkezik kritikus ponttal (az anomális rotátornál $\alpha = 0$, a PBRM-nél $\alpha = 1$ a kritikus érték), a két „fázis” mindkét esetben a delokalizált, illetve lokalizált sajátvektorokkal jellemezhető, a kritikus pontban pedig mindkét modell multifraktál tulajdonságú, emellett a szinttávolság-statisztika mindkét esetben a semi-Poisson eloszlást követi [33].

Ahhoz jelenleg még túl sok a nyitott kérdés, hogy egy, a BGS vagy BTG sejtésekhez hasonló, konkrét sejtést meg lehessen fogalmazni a kritikus állapotban levő dinamikai rendszerek és a kritikus véletlenmátrix-sokaságokkal kapcsolatban²¹. Meglátásunk szerint az elkövetkező évek során a konkrét egyezések (pl. az egyes multifraktál-kitevők stb.) vizsgálata, illetve keresése el fog vezetni minket egy általánosabb analógia megfogalmazásához.

Nem lehet eléggé kihangsúlyozni e sejtések fontosságát. Gondoljunk csak bele:

²⁰Természetesen a lebegőpontos reprezentáció véges pontossága miatt itt nem szigorúan vett irracionális paraméterről van szó.

²¹Jelenlegi ismereteink szerint legalábbis eddig még senki sem fogalmazott meg ilyen sejtést.

egymástól teljesen független fizikai rendszerekről vagyunk képesek olyan univerzális állításokat tenni, amelyek csak és kizárólag a vizsgált modellek globális szimmetriáin alapulnak. Hogy még jobban rávilágítsunk e sejtések univerzális jellegére, a következő fejezetben egy olyan fizikai modellt fogunk vizsgálni, aminek statisztikai tulajdonságai – habár Hamilton-operátorának semmi köze sincs az eddig bemutatott bármelyik rendszer Hamilton-operátorához vagy a véletlenmátrix-elméletben látott sokaságokhoz – nagyon jó egyezést mutatnak az ebben a fejezetben bemutatott statisztikákkal, melyek a különböző véletlenmátrix-sokaságokat jellemezték.

3. Rendezetlen rendszerek

Amikor kristályos anyagról beszélünk [34], általában ideális kristályt képzelünk el. Ez az idealizálás egyaránt vonatkozik a rács térbeli alakjára (a translációs invariancia és a megfelelő szimmetriák globális megléte) és összetételére (a szennyezők hiánya). A valóságban a helyzet ennél sokkal bonyolultabb. Még a legtisztább kristályokban is előfordulnak rácshibák, szennyeződések. Amíg ezek koncentrációja nem jelentős, addig általában valamilyen perturbációs számítással figyelembe tudjuk venni őket, s ezért van az, hogy az ideális kristályok elmélete számos esetben a gyakorlatban is használható eredményekkel szolgál.

Más a helyzet, ha a szennyezők és/vagy rácshibák koncentrációja nem elhanyagolható. Elég csak arra gondolnunk, hogy az elektronok Bloch-elméletének alapfeltevése az elektronszerkezet translációs invarianciája a rácson belül. Az intuíció azt sugallja, hogy az elektron-hullámfüggvények „Blochsága” a translációs invariancia „erősségének” függvénye lesz. Ez azt jelenti, hogy ha a rács nagyban eltér az ideálistól, az elektronok nem vehetik fel a „szokásos” kváziperiodikus alakjukat, valamilyen más, mégpedig lényegileg más állapotba kell, hogy kerüljenek. Ezt fogalmazta meg P. W. Anderson 1958-ban [35], amikor elméleti úton megjósolta a később kísérletileg is kimutatott fém-szigetelő fázisátalakulást (*Metal-Insulator Transition* — MIT).

3.1. Az Anderson-modell

Kiindulásként használjuk a szoros kötésű közelítés legegyszerűbb általánosítását! A rácshibákat, illetve a szennyezőket úgy vesszük figyelembe, hogy egy egységes ε atomi potenciál helyett minden egyes i rácspontban egy véletlen ε_i potenciált tételezünk fel, melyet egy 0 várható értékű és W sáv szélességű egyenletes eloszlásból veszünk. Az átfedési integrált – a számítások egyszerűsítése végett – konstansnak vesszük. Így kapjuk az Anderson-modell Hamilton-operátorát:

$$\mathbf{H} = \sum_i \varepsilon_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| + \sum_{\langle i,j \rangle} t |\varphi_i\rangle \langle \varphi_j| + \text{c. c.},$$

ahol a második tagban csak az első szomszédokra összegzünk.

A modell egzakt megoldása helyett itt csak főbb tulajdonságait emeljük ki. Anderson eredeti cikkében arra mutatott rá, hogy a W sáv szélesség bizonyos értéke felett egy elektron visszatérési valószínűsége a kezdeti állapotába nullánál nagyobb lesz. Ez a „klasszikus” ohmikus vezetés helyett egy exponenciálisan eltűnő vezetésre vezet. A jelenséget Anderson-lokalizációnak nevezzük, mely tetszőlegesen kicsi szennyeződésnél is fellép, és kettőnél nem nagyobb dimenzióban a fémes viselkedés megszűnését vonja maga után.

Mott feltételezése szerint a lokalizált állapotok a sáv két szélén jelennek meg, ezeket és a kiterjedt állapotokat az ún. mozgékony ságra választja el [36]. A fém-szigetelő

fázisátalakulást így elég szemléletesen lehet magyarázni: amikor ugyanis a (sáv két széléről induló) mozgékonyági él a rendezetlenség növekedésének hatására közelíti, majd eléri a Fermi-energiát, eltűnik a sáv közepéről az utolsó kiterjedt állapot is. Ekkor a teljes sáv lokalizálttá válik, így a vezetés megszűnik. Joffe és Regel az elektronok Boltzmann-egyenleten alapuló transzportjából kiindulva vezette le a Joffe-Regel szabályt, ami a vezetés megszűnését ahhoz köti, amikor az elektronok ℓ szabad úthossza összemérhetővé válik a k_F Fermi-hullámszámmal, vagyis amikor $k_F \ell \approx 1$ [37].

A vezetés „skalázódását” vizsgálva érdekes megállapítást tehetünk. Thouless nyomán bevezethetjük a dimenziótlan vezetést a

$$g = \frac{G}{G_0} = \frac{\pi^d h}{e^2} G \quad \text{vagy a} \quad g = \frac{E_{\text{Th}}}{\Delta} \quad (12)$$

definícióval [38]. Utóbbi verzióban E_{Th} a Thouless-energia (mely a mintán való áthaladáshoz szükséges energia skálája), Δ pedig az átlagos szinttávolság; a két definíció ekvivalens. Fejezzük most ki a dimenziótlan vezetés függését a rendszermérettől a következő skálafüggvény segítségével:

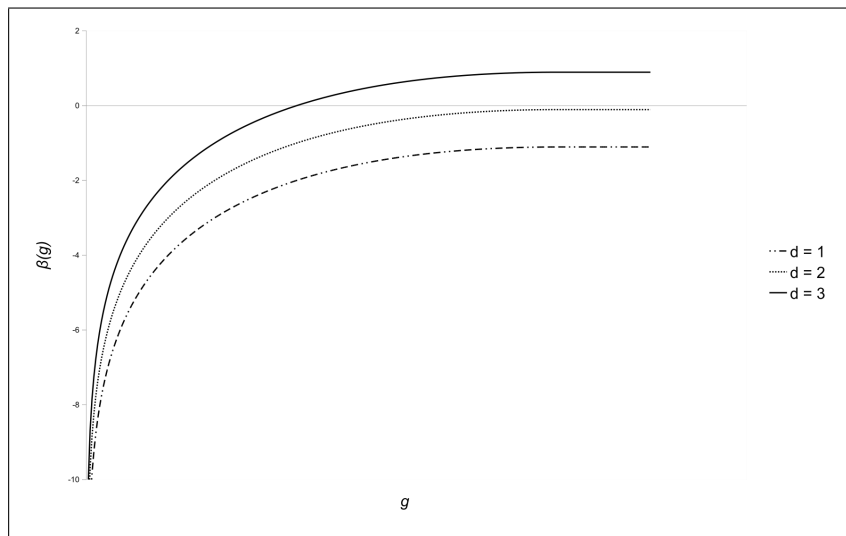
$$\beta(g) = \frac{\partial \ln g(L)}{\partial \ln L} = \frac{L}{g} \frac{dg}{dL},$$

ahol L a rendszer „lineáris mérete”. A lokalizáció skálaelmélete [39] szerint ez a függvény folytonos és monoton. Fémek határesetben (ohmikus, $g \sim L^{d-2}$ vezetést feltételezve) $\beta(g) = d - 2$, míg szigetelő határesetben (exponenciálisan eltűnő, $g \sim e^{-\frac{L}{\xi}}$ vezetést feltételezve) $\beta(g) = \ln g$. Három fontos esetet különböztethetünk meg:

- Kettőnél alacsonyabb dimenziókban β minden lehetséges g esetén negatív. Ezek szerint makroszkopikus méretű, kettőnél alacsonyabb dimenziós minták mindenképp szigetelők²².
- Kettőnél magasabb dimenziókban $g \ll 1$ esetén $\beta(g) \sim \ln g < 0$ és $\lim_{g \rightarrow \infty} \beta(g) = d - 2 > 0$, így van egy olyan, méretfüggetlen g_c kritikus vezetés, amire $\beta(g_c) = 0$.
- Kétdimenziós rendszerekben a fentiek alapján $\beta(g \rightarrow \infty) = 0$. Ám $\beta(g)$ mélyebb vizsgálatából az látszik [39], hogy a függvény makroszkopikus minták esetén is negatív marad. Így a két dimenziós minták pontosan úgy viselkednek, mint a kettőnél alacsonyabb dimenziósak.

Megállapításainkat a 8. ábra szemlélteti. Ezen jól látszik, hogy kritikus vezetőképesség csak kettőnél magasabb dimenziókban létezhet, hiszen csak $d > 2$ esetén fogja a $\beta(g)$ függvény metszeni az abszcisszát.

²²Kivéve azt az esetet, ha a minta teljesen tiszta, ekkor ugyanis ellenállása mérettől függetlenül zérus (ez nem mond ellent a fenti eredménynek, csupán arról van szó, hogy az ohmikus vezetésnél az arányossági tényező „végtelen nagy”).



8. ábra. A $\beta(g)$ függvény vázlatos képe 1, 2 és 3 dimenzióban.

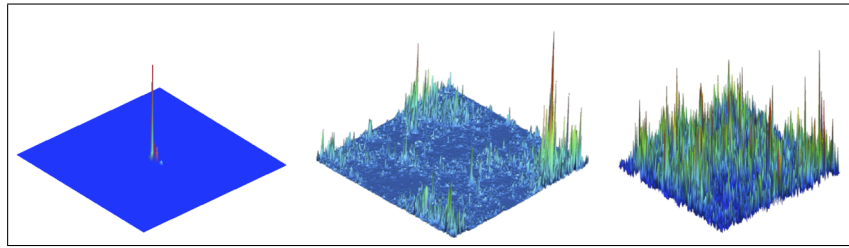
A fenti eredmények csak időtükrözésre invariáns és kölcsönhatásmentes rendszerekre érvényesek [6]. Erős mágneses térben, vagy spin-pálya csatolás esetén két dimenzióban is lehetséges fém-szigetelő átalakulás (előbbi esetre jó példa a kvantummechanikai Hall-effektus).

A legfontosabb tanulság, hogy 3 dimenziós minták esetén a vezetőképesség három méretfüggetlen fix ponttal rendelkezik. Ezek közül kettő (tökéletes szigetelő és tökéletes vezető) stabil fix pont; a kritikus g_c vezetőképesség egy instabil fix pontot határoz meg. A rendszernek ebben a „kritikus pontjában” egy másodrendű fázisátalakulás megy végbe a szigetelő és a vezető állapot között.

3.2. Analógiák

A modell egyik legérdekesebb tulajdonsága, hogy a fém-szigetelő fázisátalakulási pontban mind a lokális állapotsűrűség fluktuációi, mind a sajátfüggvények rendelkeznek a multifraktál tulajdonsággal [40], amit a 9. ábra szemléltet. Ennek oka, hogy a kritikus pontban (ahol normál esetben azt várnánk, hogy a lokális állapotsűrűség fluktuációi és a sajátfüggvények fraktálként viselkednek) a „normális” fraktáldimenziók megegyeznek a rendszer beágyazó dimenziójával, így a fraktál-tulajdonságok összetettebb módon, a lokális állapotsűrűségbeli fluktuációk és a sajátfüggvények magasabb momentumain keresztül jelennek meg. A két fázisban (fém és szigetelő) a sajátállapotok, amint már említettük, delokalizált (Bloch-jellegű), illetve lokalizált alakot vesznek fel.

A spektrum fémes esetben Wigner-Dyson, míg szigetelő határesetben a Poisson-statisztikát követi; a kritikus pont spektruma a semi-Poissonhoz hasonló, a két stabil



9. ábra. A 3 dimenziós Anderson-modell sajátfüggvényei a szigetelő, a kritikus és a fémes állapotban. Az ábra forrása [41].

statisztika között interpoláló kritikus statisztikát követ²³ [42]. A spektrális kompresszibilitás fémes esetben 0, szigetelő esetben 1, a kritikus pontban pedig a kettő között van (3 dimenziós modell esetén értéke $\chi_{kr} \approx 0,27$ [43]).

Nem lehet nem észrevenni, hogy a fenti tulajdonságok mindegyikét egyúttal a PBRM sokaság is hordozza. A két modell közötti analógia olyannyira szembetűnő, hogy a PBRM-sokaságnál említett gyenge és erős multifraktalitätsi tartományok (melyek az $\alpha = 1$ melletti különböző b értékekhez tartozó sajátfüggvény-struktúrákat hivatottak karakterizálni) az Anderson-modell kritikus pontjában is jelen vannak: a $b \ll 1$ által jellemzett gyenge multifraktalitásnak a $d = 2 + \epsilon$, $\epsilon \ll 1$ dimenziós Anderson-modell kritikus pontja, míg a $b \gg 1$ által fémjelzett erős multifraktalitásnak a $d \gg 1$ dimenziós Anderson-modell kritikus pontja felel meg [40]. Hasonló analógiát fedezhetünk fel az első fejezetben bemutatott anomális rugdosott rotátorral is. Itt is megfigyelhető egy „fázisátmenet” $\alpha = 0$ esetén, s a két fázisban lokalizált, illetve lokalizálatlan sajátfüggvények találhatók; ugyanúgy megjelenik a multifraktál-viselkedés a kritikus pontban; a spektrális kompresszibilitás hasonló tulajdonságokat mutat, mint az Anderson-modell esetén. Utóbbi analógia persze a BGS és BTG sejtések, valamint a kritikus rendszerekre általunk megfogalmazott gyengébb sejtés miatt nem annyira meglepő.

Az ilyen típusú, szemmel látható hasonlóságok mutatják, hogy a (kvantum)kaotikus rendszerek, illetve a mezoszkopikus rendszerek fizikája – legalábbis a statisztikai tulajdonságok erejéig – mélyen összefonódik. Megdöbbentő azt látni, hogy végső soron e rendszerek legtöbb spektrális jellemzőjét pusztán az egyes modellek globális szimmetriái által meg tudjuk jósolni a véletlen mátrixok elméletének segítségével.

²³A kritikus statisztika egy analitikusan még definiálatlan köztes statisztika. Sejtésünk az, hogy megegyezik a semi-Poisson statisztikával.

4. Dinamikai stabilitás

Az eddigiek során különféle kvantum-kaotikus modellek, illetve a BGS sejtés alapján nekik megfeleltethető véletlen mátrixok alapvető tulajdonságaival (spektrálstatistika, korrelációk stb.) foglalkoztunk. Egy fizikai rendszerrel kapcsolatban azonban a legfontosabb kérdés többnyire az, hogy hogyan viselkedik az időben? Milyen folyamatok játszódnak le benne, a külső hatásokra hogyan reagál, és mindez hogyan mutatkozik meg a rendszert jellemző fizikai mennyiségek (a dinamikai változók) időfüggésén?

A válasz bármelyik elemi statisztikus mechanikai tankönyvben fellelhető: ha rendszerünket a \mathbf{H} Hamilton-operátor írja le, s \mathbf{A} egy tetszőleges dinamikai változót leíró operátor, akkor \mathbf{A} időfüggését a

$$i\hbar \frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\mathbf{A}, \mathbf{H}]$$

egyenlet írja le. Ha most a mennyiség $\text{tr}(\rho\mathbf{A})$ -val definiált várható értékére vagyunk kíváncsiak (ahol ρ a sűrűség-operátor), a fenti kifejezést átírhatjuk:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d \text{tr}(\rho\mathbf{A})}{dt} &= \text{tr}(\rho\mathbf{A}\mathbf{H} - \rho\mathbf{H}\mathbf{A}) = \text{tr}(\rho\mathbf{A}\mathbf{H}) - \text{tr}(\rho\mathbf{H}\mathbf{A}) = \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{H}\rho) - \text{tr}(\mathbf{A}\rho\mathbf{H}) = \text{tr}(\mathbf{A}[\mathbf{H}, \rho]) = i\hbar \text{tr}\left(\mathbf{A} \frac{d\rho}{dt}\right) \end{aligned}$$

A legutolsó lépésben a Neumann-egyenletet helyettesítettük be. A fentiekből az látszik, hogy ahhoz, hogy tetszőleges dinamikai mennyiség időfüggését meghatározzuk, elegendő, ha a sűrűség-operátor időfüggését ismerjük (a Liouville-egyenlet felhasználásával hasonló kijelentést tehetünk klasszikus rendszerekre: ott tetszőleges dinamikai változó időfüggésének ismeretéhez elég a „fázisfolyadék”, a sűrűségfüggvény dinamikáját ismernünk). Ez egyben azt is mutatja, hogy amennyiben az állapotsűrűség valamilyen külső hatásra „elenyésző” mértékben változik, akkor tetszőleges, a rendszerben mérhető mennyiség sem fog számottevően változni. Ezzel szemben, ha a külső hatás olyan erős, hogy lényegi módon (drasztikus esetben strukturálisan) változik tőle az állapotsűrűség, a rendszert nem tekinthetjük többé azonosnak, sőt, még hasonlónak sem a külső hatást megelőző állapottal. Ez sokszor azzal is jár, hogy azok az összefüggések, melyek a perturbációt megelőzően érvényben voltak, értelmüket veszítik, s helyükre új, akár teljesen más elvekből levezetett egyenletekre van szükségünk.

Ebben a fejezetben egy módszert mutatunk be, hogy a fenti kérdésekre választ kapjunk. Pontosabban, egy olyan eljárást ismertetünk, amely segítségével

- el tudjuk különíteni az „elenyésző” és a „drasztikus” perturbációkat egymástól, illetve
- valamilyen használható mennyiséget kapunk, mellyel a sűrűségfüggvény időbeli „deformációját” hatékonyan leírhatjuk.

4.1. Loschmidt paradoxona

Boltzmann még a statisztikus fizika hajnalán, 1872-ben publikálta H-tételét [44], mely az ideális gázok szükségszerű entrópiánövekedésére mutat rá egy tetszőleges (nem-egyensúlyi) folyamatban. A tétel a maga idejében hatalmas vitát gerjesztett, melynek kapcsán Loschmidt a következő paradoxont [45] fogalmazta meg: mivel Newton törvényei időtükrözés-invariánsak, ezért ha van egy olyan folyamat, mely során az ideális gáz entrópiája növekszik, akkor léteznie kell egy olyan lehetséges folyamatnak is, amely az előző folyamat inverze, és amely során az entrópia csökken. Itt az invertálás azt jelenti, hogy adott pillanatban a rendszer összes részecskéjének egyszerre megfordítjuk az impulzusát. Az anekdoták szerint Boltzmann a paradoxont egy huszárvágással oldotta fel, hiszen azt tanácsolta Loschmidtnak, hogy fordítsa meg egy részecskerendszerben a részecskék impulzusát, és akkor meglátja. . .

A válasz több fontos tényre rámutat. Először is, a fizikus elsősorban a természet törvényszerűségeit figyeli meg és írja le, így amíg valaki nem képes „invertálni” egy rendszert, illetve kísérletileg megvalósítani egy ilyen invertálást, addig fizikai szempontból fölösleges arról elmélkedni, hogy mi történne, ha ez mégis bekövetkezne²⁴. Ami viszont ennél sokkal fontosabb, a kijelentés tanúbizonyságot tesz arról, hogy Boltzmann a maga korában erre a kérdésre nem tudott, nem is tudhatott helyes választ adni²⁵. Az invertálást végző „Loschmidt-démon” kiirtásához ugyanis a termodinamika statisztikus interpretációjára van szükség.

A (kvantum)statisztikus mechanika keretein belül vizsgálva a problémát az első tény, amit megállapíthatunk, hogy habár az egyes mikroállapotok valószínűsége azonos, nem minden konfigurációhoz tartozik azonos számú mikroállapot, sőt, általában a megengedett mikroállapotok többsége egyetlen, úgynevezett egyensúlyi állapothoz, vagy annak szűk környezetéhez tartoznak, s csak elenyésző azon mikroállapotok száma, amelyek valamilyen speciális, az egyensúlyi állapottól lényegesen eltérő konfigurációt írnak le. Ezért ezeknek az állapotoknak az entrópiája alacsonyabb, mint az egyensúlyi állapoté, más szóval, ha a Loschmidt-démon létezik, annak olyan folyamatokat kell tudnia létrehozni, mely képes az „extrém” állapotból az egyensúlyi állapot felé tartó folyamatot invertálni, ezáltal olyan folyamatot létrehozni, mely az egyensúlyi állapotból valamilyen „extrém” állapot felé tart²⁶.

²⁴Ami természetesen nem jelenti azt, hogy a gondolkodó szellem számára egy tisztán hipotetikus probléma ne lehetne érdekes *per se*. Ellenkezőleg, a legtöbb forradalmi újítás általában hasonlóan absztrakt ötletekben gyökeredzik; a kulcs, hogy meg tudjuk különböztetni a valóban forradalmi gondolatokat az egyszerű kukacoskodástól.

²⁵Ne feledjük, hogy a termodinamika valószínűségi interpretációja ekkor még csak születőfélben levő elmélet volt, többek között a Loschmidt-paradoxon is inspirálhatta Boltzmann és társait, hogy a statisztikus felfogásban végképp megerősödjének. Boltzmann csak 1896-ban publikálta első könyvét [46], amelyben az elmélet kiforrott formában jelent meg.

²⁶A tipikus példa, amit ilyenkor emlegetni szoktak, a jég-víz keverék példája, ti. a kezdeti „extrém” konfiguráció, a jég-víz keverék kellő idő elteltével mindig átkerül a rendszernek megfelelő egyensúlyi

Mivel egy ilyen megfordított folyamat olyan konfigurációhoz tartana, amelyhez csak igen kevés mikroállapot tartozik, ezért ha a legkisebb hiba is csúszna a tükrözésbe, az időtükrözött rendszer már nem az eredeti „extrém” állapotába tartana, hanem valahova máshova. Ez az „eltérített” állapot pedig legnagyobb valószínűséggel az egyensúlyi állapot lenne, ugyanis ebben található a legtöbb mikroállapot. A probléma feloldásának kulcsa tehát a tükrözésben rejlik, márpedig az nyilvánvaló, hogy a rendszert tökéletesen tükrözni elméletileg is lehetetlen feladat. Nem elég ugyanis a vizsgált rendszer összes részecskéjét tükrözni, hiszen a vizsgált rendszer kapcsolatban van a környezetével valamilyen szinten (ha mással nem, hát a mérőberendezéssel és a Loschmidt-démonnal), így a környezet részecskéit is tükrözni kellene. Túl azon, hogy ez egy bizonyos méret után technikailag lehetetlen, érdekes filozófiai kérdést vet fel, hogy vajon a tükrözést végző Loschmidt-démon képes lehet-e önmaga időtükrözésére?

4.2. Hűség

A Loschmidt-paradoxon feloldása után feltehetjük a kérdést: mennyire tér el a (tökéletesen) időtükrözés során kapott konfiguráció a rendszer kezdeti konfigurációjától? A legegyszerűbb módszer, ahogy az eltérést mérhetjük, ha a kezdeti, majd az (időtükrözés után kapott) végállapot átfedését tekintjük. Ha az időtükrözés tökéletes volt, akkor nyilván a kezdeti és a végállapot megegyezik, átfedésük ekkor maximális, és minél érzékenyebb a rendszer az időtükrözés „tökéletességére”, annál kisebb lesz az átfedés.

Az alábbiakban e módszer részleteit mutatjuk be, elsősorban a kvantummechanika keretein belül [47].

Legyen $|\psi_0\rangle$ egy tetszőleges kezdeti állapot, melyet a t időpontban tükrözünk, s legyen $|\psi'_t\rangle$ az időtükrözést követő újabb t idő elteltével kapott végállapot. E két állapot átfedését nevezzük hűségi amplitúdónak (*fidelity amplitude*), a hűségi amplitúdó abszolútérték-négyzetét pedig hűségnek (*fidelity*):

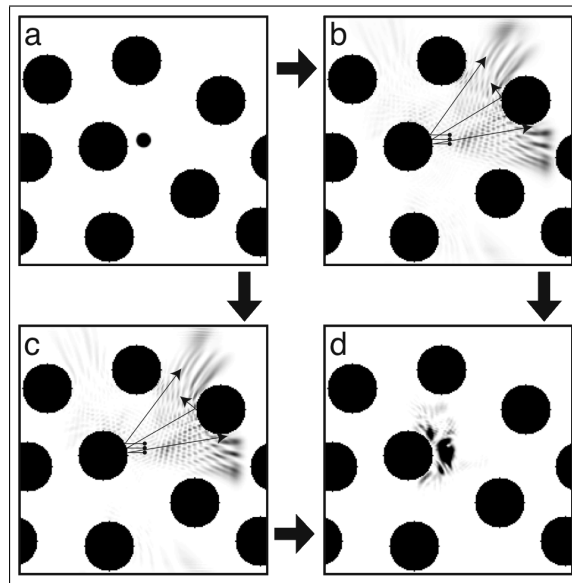
$$f(t) = \langle \psi_0 | \psi'_t \rangle, \quad F(t) = f^2(t) \equiv |\langle \psi_0 | \psi'_t \rangle|^2$$

Legyen az eredeti rendszer Hamilton-operátora \mathbf{H}_0 , az időtükrözötté²⁷ pedig \mathbf{H}' és tételezzük fel, hogy ezek az operátorok időfüggetlenek. Ekkor felírhatjuk az állapot időfüggését az eredeti és az inverz rendszerekben:

$$\begin{aligned} |\psi_\tau\rangle &= e^{-\frac{i\mathbf{H}_0\tau}{\hbar}} |\psi_0\rangle \\ |\psi'_\tau\rangle &= e^{-\frac{i\mathbf{H}'(-\tau)}{\hbar}} |\psi_\tau\rangle = e^{\frac{i\mathbf{H}'\tau}{\hbar}} e^{-\frac{i\mathbf{H}_0\tau}{\hbar}} |\psi_0\rangle \end{aligned}$$

állapotba (mely vagy teljesen víz, vagy teljesen jég). Olyan azonban senki sem figyelt meg eddig, hogy egy pohár víz magától szétválna jégre és melegvízre. A Loschmidt-démon, ha létezne, ilyen folyamatokat tudna indukálni.

²⁷Vagyis a pontatlannak feltételezett időtükrözés miatt deformált rendszer Hamilton-operátoráról van szó, mely pontosan megegyezne \mathbf{H}_0 -lal, ha az időtükrözés pontos lenne. Az időtükrözést tehát nem a Hamilton-operátor időtükrözésével oldjuk meg, hanem az időtengely irányának megváltoztatásával.



10. ábra. A hűség két különböző interpretációja. Mindkét esetben a reprezentálja a kezdeti állapotot. Az időtükrözést feltételező felfogás szerint ezt először a b állapotba fejlesztjük, majd a (tökéletlen) időtükrözés után kapjuk a d állapotot. A párhuzamos időfejlesztést feltételező hozzáállás szerint az a állapotot az eredeti rendszer a b , a perturbált rendszer a c állapoton keresztül fejleszti d -be. A hűség mindkét esetben az a és a d állapotok átfedése. Az ábra forrása [48].

A hűségi amplitúdót így kifejezhetjük a Hamilton-operátorokkal és a kezdeti állapottal:

$$f(t) = \langle \psi_0 | e^{\frac{i\mathbf{H}'t}{\hbar}} e^{-\frac{i\mathbf{H}_0t}{\hbar}} | \psi_0 \rangle$$

Vegyük észre, hogy e formulának létezik egy alternatív interpretációja is: ha a $|\psi_0\rangle$ állapotot egyszer elindítjuk a \mathbf{H}_0 , egyszer pedig a \mathbf{H}' rendszerben (most mindkét esetben pozitív irányú időfejlesztéssel), a hűségi amplitúdó nem más, mint a két alternatív végállapot átfedése. Ezt az interpretációt kísérletileg sokkal könnyebb megvalósítani, mint az időtükrözést, ezért a hűséget általában ezen az úton szokás mérni. A két felfogást a 10. ábra mutatja be.

Megjegyezzük, hogy a hűség klasszikusan is definiálható, ekkor a kezdeti $\rho_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ állapotsűrűséget időfejlesztjük t ideig a \mathcal{H}_0 Hamilton-függvénnyel, majd „visszafelé időfejlesztjük” (ugyanúgy t ideig) a \mathcal{H}' Hamilton-függvénnyel, így kapjuk a $\rho'(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ állapotsűrűséget. A kettő átfedése a hűség klasszikus definíciója:

$$F(t) = \left| \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rho'(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \, d\mathbf{p} \, d\mathbf{q} \right|^2$$

Klasszikusan is megmutatható, hogy a fentivel ekvivalens definíciót jelent, ha a

$\rho_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ kezdeti állapotssűrűséget t ideig egyaránt időfejlesztjük a \mathcal{H}_0 és a \mathcal{H}' Hamilton-függvényekkel, majd a kapott $\rho_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ és $\rho''(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ állapotssűrűségek átfedését tekintjük a hűség definíciójának:

$$F(t) = \left| \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \rho''(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \, d\mathbf{p} \, d\mathbf{q} \right|^2$$

Eddig nem esett szó arról, hogy a dinamikai stabilitás kérdése, illetve maga a hűség hogyan kapcsolódik a kvantumkaotikus rendszerek vizsgálatához. Az első fejezetben utaltunk rá, hogy a (klasszikus) kaotikus dinamikai rendszerek két fő jellemzője, a kezdeti feltételektől való exponenciális függés és az ergodicitás nehezen ültethető át közvetlen módon a kvantummechanika nyelvére. Emiatt az eddigiiek során az egyes rendszerek statikai jellemzőit (spektrum, szinttávolság-statisztika, multifraktalitás stb.) vizsgálva vontunk le mindenféle következtetéseket. Sőt: a kvantumkaotikus rendszerek legerjedtebb meghatározása – hogy t. i. olyan kvantumrendszerek, amelyek klasszikus megfelelője kaotikus – szintén egy olyan definíció, ami egyáltalán nem foglalkozik a vizsgált kvantumrendszer dinamikai tulajdonságaival. Ha jobban belegondolunk, ez a hozzáállás – habár nyilvánvaló történelmi okai vannak²⁸ – természetellenes. A káosz elsősorban a vizsgált rendszerek dinamikai viselkedésén keresztül nyilvánul meg; a logikus az volna tehát, ha a kvantumrendszereket a klasszikus megfelelőikre való hivatkozás nélkül, pusztán saját dinamikai tulajdonságaik alapján tudnánk besorolni a kaotikus és az integrálható rendszerek kategóriáiba.

E célt szolgálhatja a hűség. Gondoljuk meg, hogy klasszikus esetben a hűség közvetlenül képes mérni az egyes rendszerek kaotikusságát: hiszen ha egy (klasszikus) modellben teljesül a kezdeti feltételektől való exponenciális függés és az ergodicitás kritériuma, a hűség nyilvánvalóan el fog tűnni exponenciálisan. Ezzel szemben az integrálható rendszereknél azt várjuk, hogy a hűség valamilyen periodicitást mutasson. Ebből kiindulva A. Peres [47] a kvantum-kaotikus rendszerek egy alternatív definícióját javasolta: azokat a kvantumrendszereket tekintjük kaotikusnak, amelyek hűsége eltűnik (véges rendszerméret esetén $\frac{1}{N}$ nagyságrendű „zajra” redukálódik), míg azokat tekintjük integrálhatóaknak, ahol ez a típusú hosszútávú eltűnés nem figyelhető meg, illetve hosszú távon a hűség periodikus jellegűvé válik. E meghatározás legnagyobb előnye, hogy olyan kvantumrendszerekre is alkalmazható, amelyeknek nincs klasszikus határeset, ráadásul közvetlen módon, a dinamikai viselkedés alapján sorolja be az egyes modelleket. Sajnos – amint az a következő bekezdésekből ki fog derülni – ez a definíció nem állja meg a helyét: látni fogjuk, hogy általános esetben egy kaotikusnak gondolt kvantumrendszer hűsége lassabban cseng le, mint egy integrálhatóé; Peres eredeti cikkében egy olyan csatolt rotátor-rendszert vizsgált, amely ilyen szempontból

²⁸Sokkal korábban kezdtek kvantumkaotikus rendszerekkel foglalkozni, mint hogy bevezették volna a hűség fogalmát, ráadásul a hűség a mai napig nem túl elterjedt, szemben a „mainstreamnek” tekinthető egyéb módszerekkel.

anomálisan viselkedik, és a kaotikus régióban valóban gyorsabban tűnik el a hűsége, mint az integrálható tartományban. Ennek ellenére az az általános vélekedés, hogy a hűség további tanulmányozásának eredményeként képesek leszünk az egyes kvantummechanikai rendszereket a hűségükön keresztül megnyilvánuló dinamikai tulajdonságaik alapján egyértelműen besorolni az „integrálható”, illetve „kaotikus” kategóriákba.

4.3. Lineáris válaszmélet

Ha az időtükrözés „tökéletlenségét” egy, a \mathbf{H}_0 rendszer és a \mathbf{B} környezet között felépő kölcsönhatás erősségét kifejező x paraméterrel jellemezzük, akkor \mathbf{H}' kifejezhető:

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}_0 + x\mathbf{B}$$

A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy a \mathbf{H}_0 rendszer, a \mathbf{B} környezet, illetve az x kölcsönhatási paraméter ismeretében mit tudunk mondani a hűségről²⁹.

Legyen $\mathbf{U}_x(t)$ a $\mathbf{H} + x\mathbf{B}$ által leírt rendszer propagátora (nyilván az eredeti, perturbációmentes rendszer propagátora ekkor $\mathbf{U}_0(t)$ lesz). Ezek segítségével bevezethetjük a „visszhang-operátort” (*echo operator*):

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{U}_0(-t)\mathbf{U}_x(t), \quad (13)$$

melynek kvantummechanikai várható értéke nem más, mint a hűségi amplitúdó:

$$f(t) = \langle \mathbf{M}(t) \rangle,$$

amint az az előző fejezetben leírtakból következik. Eszerint a hűségi amplitúdó analízise visszavezethető a visszhang-operátor analízisére.

Elemi számításokkal belátható, hogy az imént definiált operátor kielégíti az alábbi egyenletet:

$$i\hbar \frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = x\hat{\mathbf{B}}(t)\mathbf{M}(t),$$

ahol $\hat{\mathbf{B}}(t)$ a \mathbf{B} kölcsönhatási operátor Dirac-képpen kifejtett alakja: $\hat{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{U}_0(-t)\mathbf{B}\mathbf{U}_0(t)$. Ezt iterációs úton megoldva³⁰ kapjuk, hogy

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(i\hbar)^n n!} \int_{\tau_1=0}^t \cdots \int_{\tau_n=\tau_{n-1}}^t \mathbf{T}\hat{\mathbf{B}}(\tau_1) \cdots \hat{\mathbf{B}}(\tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n,$$

ahol \mathbf{T} az időrendezés operátora. Az iterációt másodrendig folytatva, visszahelyettesítés után kapjuk, hogy a hűségi amplitúdó közelítő formulája

$$f(t) \approx 1 + \frac{x}{i\hbar} \int_0^t \langle \hat{\mathbf{B}}(\tau) \rangle d\tau - \frac{x^2}{\hbar^2} \int_{\tau_1=0}^t \int_{\tau_2=\tau_1}^t \langle \hat{\mathbf{B}}(\tau_1)\hat{\mathbf{B}}(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2,$$

²⁹Az itt következő levezetést gyakorlatilag [49]-ből vettük át, ahol [50]-nek egy kivonata szerepel. Utóbbi cikk kiváló összefoglalása a hűséggel kapcsolatos legfontosabb elméleti eredményeknek.

³⁰A módszer neve Born-közelítés, illetve Dyson-sorfejtés.

melynek négyzetre emelésével kapjuk a hűséget:

$$F(t) \approx 1 - \frac{x^2}{\hbar^2} \int_0^t \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau, \tau') \, d\tau \, d\tau' \approx \exp\left(-\frac{x^2}{\hbar^2} \int_0^t \int_0^\tau \mathcal{C}(\tau, \tau') \, d\tau \, d\tau'\right),$$

ahol felhasználtuk, hogy a fluktuáció autokorrelációs függvénye a kölcsönhatási operátorral a

$$\mathcal{C}(\tau, \tau') = \langle \hat{\mathbf{B}}(\tau) \hat{\mathbf{B}}(\tau') \rangle - \langle \hat{\mathbf{B}}(\tau) \rangle \langle \hat{\mathbf{B}}(\tau') \rangle$$

formula szerint kifejezhető, valamint, hogy $x \ll 1$: $\exp(-x) \approx 1 - x$.

Ha a korrelációs függvény (időben) homogén – vagyis $\mathcal{C}(\tau, \tau') \equiv \mathcal{C}(\tau - \tau')$ –, a második integrálás elvégezhető, így a hűség egyszerűbben kifejezhetővé válik:

$$F(t) \approx \exp\left(-\frac{x^2}{\hbar^2} \int_0^t (t - \tau) \mathcal{C}(\tau) \, d\tau\right)$$

Első ránézésre úgy tűnhet, hogy a hűség gyakorlatilag csak a perturbációtól függ, hiszen nem tartalmaz olyan kifejezést, ami az eredeti rendszer Hamilton-operátorára utalna. Ne feledjük azonban, hogy a $\mathcal{C}(t_1, t_2)$ autokorrelációs függvény a $\hat{\mathbf{B}}(t)$ operátor autokorrelációját írja le. Ez az operátor közvetlen kapcsolatban van mind az eredeti Hamilton-operátorral (az $U_0(t)$ propagátoron keresztül), mind a perturbáló \mathbf{B} potenciállal. Itt jegyezzük meg, hogy az eddigiek könnyen általánosíthatóak időfüggő $\mathbf{B}(t)$ perturbációkra is; pontosan azért választottunk a levezetéshez egy időfüggetlen perturbációt, hogy a sorok között is végig ki legyen hangsúlyozva a \mathbf{B} és a $\hat{\mathbf{B}}(t)$ operátorok közötti különbség.

Emlékezzünk most vissza Peres javaslatára: akkor tekintsünk egy rendszert kaotikusnak, ha hűsége eltűnik, míg integrálhatónak, ha a hűség nem, vagy csak nagyon lassan tűnik el. Általános esetben feltehetjük, hogy egy kaotikus rendszerben az autokorrelációs függvény gyorsan ($\frac{1}{\tau}$ -nál gyorsabban) cseng le, míg egy integrálható rendszerben az autokorreláció periodikus lesz, általában nullánál nagyobb időátlaggal. A hűség fenti kifejezései alapján ez azt jelenti, hogy általánosságban egy kaotikus rendszer hűsége $\exp(-C_{\text{ch}} x^2 t)$, míg egy integrálható rendszeré $\exp(-C_{\text{int}} x^2 t^2)$ szerint tűnik el (C_{ch} és C_{int} konstansok), ami ellentmond Peres eredeti felvetésének. E tény minden esetre meglepő. A klasszikus viselkedés alapján joggal várhatnánk, hogy az integrálható rendszerek hűsége jobban megmaradjon, mint a kaotikusaké. Hogy ez mégsem így van, az valószínűleg ugyanazoknak az interferenciáknak köszönhető, amelyek a korábban már ismertetett anomális diffúzióért is felelnek: sejtésünk szerint a momentum-térbeli lokalizáció, úgy tűnik, a hűséget is „befagyasztja”.

Természetesen a fenti közelítések csak akkor érvényesek, amikor a másodiknál magasabb rendű tagok elhanyagolhatóak. Amint azt látni fogjuk, két olyan, egymástól lényegileg eltérő tartomány van, amelyben ez érvényes. A továbbiakban erre világítunk rá.

4.3.1. Wigner-tartomány

Legyen t_c az a karakterisztikus idő, amennyi idő alatt a korreláció elhanyagolhatóvá válik. A legtöbb kaotikus rendszerben ez a karakterisztikus idő nagyon rövid³¹, így (valamint felhasználva, hogy $\mathcal{C}(\tau > t_c) \approx 0$) az integrál $t > t_c$ esetére átírható:

$$F(t) \approx \exp\left(-\frac{x^2}{\hbar^2} t \int_0^{t_c} \mathcal{C}(\tau) d\tau\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{\hbar^2} \sigma t\right),$$

ahol σ a Kubo-féle lineáris transzport-együttható (ahol az integrálási kiterjesztettük a végtelenig):

$$\sigma = \int_0^\infty \mathcal{C}(\tau) d\tau$$

Ezek szerint a Wigner-tartományban³² a hűség $t > t_c$ esetén exponenciálisan cseng le.

4.3.2. Gauss-tartomány

Olyan rendszerekben, melyek Hilbert-tere véges dimenziós, a korreláció nem cseng le teljesen, aszimptotikus viselkedése során egy véges érték körül fluktuál. A lecsengés karakterisztikus ideje megegyezik a t_H Heisenberg-idővel³³, értéke pedig [49] alapján

$$\langle \mathcal{C} \rangle = \frac{4}{N} \int_0^\infty \mathcal{C}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \Big|_{\omega=0} = \frac{2}{N^2} \tilde{\mathcal{C}}(\omega=0) = \frac{4\sigma'}{N},$$

ahol bevezettük a

$$\sigma' = \frac{1}{2N} \tilde{\mathcal{C}}(\omega=0)$$

jelölést. Ezzel a hűségre

$$F(t) \approx \exp\left(-\frac{x^2}{\hbar^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \langle \mathcal{C} \rangle d\tau d\tau'\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{\hbar^2} \frac{4\sigma'}{N} t^2\right),$$

adódik a $t > t_H$ esetben. Természetesen ezt csak akkor figyelhetjük meg, ha a hűség sokkal lassabban cseng le, mint a Heisenberg-idő, ami az x csatolási paraméter kellően kis voltát tételezi fel. Éppen ezért ezt a tartományt standard perturbációs tartománynak is hívják.

³¹E feltételezés csak néhány speciális rendszerre nem igaz, például ha a $\mathbf{B}(\tau)$ kölcsönhatás valamilyen fizikai mennyiség teljes deriváltjaként írható fel. Ennek magyarázata és további példák forrása [50].

³²Más néven a Fermi-féle aranyzabály tartománya.

³³A Heisenberg-idő az a karakterisztikus idő, ami a Heisenberg-féle határozatlansági reláción keresztül kapcsolódik az átlagos szinttávolsághoz:

$$t_H = \frac{\hbar}{2\Delta}$$

4.3.3. Zeno-tartomány

Abban a nagyon rövid időben, amíg a korreláció még nem kezd csökkenni³⁴, a hűség univerzális viselkedést mutat [50]:

$$F(t) \approx 1 - \left(\frac{x}{\hbar}\right)^2 \langle \mathbf{B}^2 \rangle t^2 \approx e^{-\left(\frac{x}{\hbar}\right)^2 \langle \mathbf{B}^2 \rangle t^2}$$

A t_Z Zeno-idő, ameddig a formula érvényes [47]:

$$t_Z = \sqrt{\frac{\mathcal{C}(0,0)}{\frac{d^2 \mathcal{C}(0,t)}{dt^2}}} = \hbar \sqrt{\frac{\langle \mathbf{B}^2 \rangle}{\langle [\mathbf{H}_0, \mathbf{B}]^2 \rangle}}$$

4.3.4. A lineáris válaszmélet alkalmazhatósága

A Zeno-tartomány a csatolási együtthatótól függetlenül t_Z ideig mindig megjelenik. A Gauss- illetve Wigner-tartományok azonban csak akkor jelentkeznek, ha a perturbációs paraméter „megfelelően kicsi”. Láttuk, hogy a Gauss- illetve a Wigner tartományban a hűséget az

$$F(t) = \begin{cases} e^{-(\gamma_g t)^2}, & \gamma_g = \frac{x}{\hbar} \sqrt{\frac{\sigma'}{N}} \quad (\text{Gauss}) \\ e^{-\gamma_e t}, & \gamma_e = \left(\frac{x}{\hbar}\right)^2 \sigma \quad (\text{Wigner}) \end{cases}$$

összefüggés határozza meg. A két tartomány határát úgy kaphatjuk meg, ha a tartományokra jellemző karakterisztikus idők inverzeit (t_c és t_H) megfeleltetjük ezeknek a „lecsengési együtthatóknak”:

$$\frac{1}{t_H} \sim \gamma_g \quad (\text{Gauss}) \quad \frac{1}{t_c} \sim \gamma_e \quad (\text{Wigner})$$

Ezeket megoldva megkapjuk a tartományok határait a perturbáció erősségével kifejezve [49]:

$$x_g = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{\sigma N}} \quad (\text{Gauss}) \quad x_e = x_g \sqrt{\frac{\Delta_b}{\Delta}} \quad (\text{Wigner}),$$

ahol Δ_b a \mathbf{B} perturbáció sávszélessége, Δ pedig \mathbf{H}_0 átlagos szinttávolsága.

A lineáris válaszmélet alkalmazhatóságának tehát az x_e ³⁵ perturbációs erősség szab határt. Efölött a nemperturbatív³⁶ tartomány következik. Itt a hűség (a klasszikus határesettel rendelkező kaotikus rendszerek többségére legalábbis) exponenciális

³⁴Ennek a tartománynak a hossza a t_Z Zeno-idő, ekkor tehát

$$\tau, \tau' < t_Z : \quad \mathcal{C}(\tau, \tau') \approx \mathcal{C}(0, 0) = \langle \mathbf{B}^2 \rangle$$

³⁵Melyet épp ezért x_{prt} indexszel is jelöl a szakirodalom.

³⁶Az itt alkalmazandó módszerek miatt gyakran e régiót szemiklasszikus tartománynak hívják.

lecsengést mutat

$$F(t) \sim e^{-\Lambda t}$$

szerint, ahol Λ a klasszikus rendszer legnagyobb Ljapunov-exponense. Figyelemre méltó, hogy míg a lineáris válaszelmélet kereteiben fontos a perturbáció erőssége, a szemiklasszikus közelítésben ez a paraméter nem játszik szerepet [51, 52, 53]. Továbbá kifejezetten érdekesnek mondható, hogy egy kvantummechanikai probléma tárgyalása során azzal kell szembesülnünk, hogy a rendszer viselkedését legjellemzőbben leíró paraméter tulajdonképpen egy olyan klasszikus együttható, ami a kvantummechanikai tárgyalás során elvi szinten sem jelenhet meg, hiszen az kizárólag csak a klasszikus értelmezésben létező trajektóriák viselkedésével kapcsolatos.

Megjegyezzük, hogy ez a leírás nem teljes. Ahogy a 31. lábjegyzetben utaltunk rá, a témát részletesen bemutató [50] egy sor olyan példával szolgál, ahol valamilyen okból a hűség anomálishan viselkedik. Ezek részletes tárgyalása azonban meghaladja e dolgozat kereteit.

4.4. A hűség vizsgálata véletlen mátrixokkal

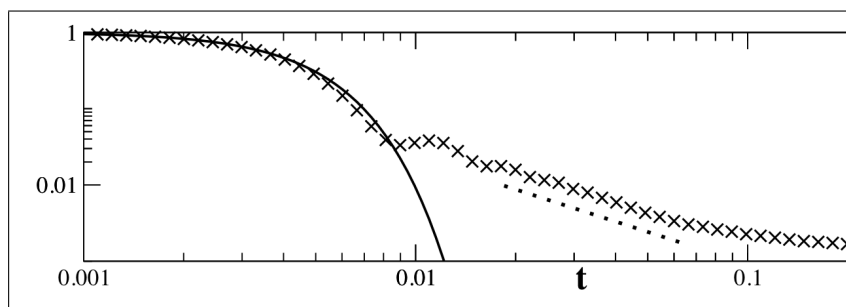
A hűség numerikus vizsgálatának talán legkézenfekvőbb módja a véletlen mátrixok alkalmazása. Ekkor mind a \mathbf{H}_0 , mind a \mathbf{B} operátorokat valamilyen véletlenmátrix-sokaság segítségével reprezentáljuk, a kezdeti állapotokat pedig gyakran a rendszert leíró véletlenmátrix-sokaság spektrumának közepéből választjuk.

A fenti eredmények többségét számos véletlen mátrixokkal végzett szimuláció támasztja alá. A Gauss- és Poisson-sokaságokkal, illetve ezek variánsaival végzett szimulációk szinte minden, a témával kapcsolatos cikkben megtalálhatók, s ezek rendre igazolják a lineáris válaszelméletből levezetett összefüggéseket. Érdekesebbek ennél a különböző, „egzotikus” sokaságokon végzett kísérletek.

4.4.1. Kritikus rendszerek hűsége

Egy ilyen „egzotikus” sokaság a korábban már bevezetett PBRM. E mátrixcsalád hűségét a perturbáció és a sávszélesség függvényében többen is vizsgálták, [49] a témában elért eredményeket átfogóan ismerteti. A numerikus szimulációk és elméleti számítások középpontjában azok a kísérletek állnak, melyekben mind \mathbf{H}_0 , mind \mathbf{B} a PBRM-sokaságból kerülnek ki. Megjegyezzük, hogy az így képzett $\mathbf{H}_0 + x\mathbf{B}$ mátrixok egy külön véletlenmátrix-sokaságot alkotnak, melynek neve Wigner-Lorentz sokaság (*Wigner-Lorentzian Random Matrix* — WLRM). E mátrixok számos érdekes tulajdonságának (multifraktalitás stb.) egyike, hogy a sávprofiljuk független x -től, az csak az őket alkotó PBRM mátrixok paramétereitől függ [54].

A következőkben röviden ismertetjük a főbb eredményeket [49], [55] és [56] alapján.



11. ábra. A WLRM sokaság hűsége a kritikus tartományban ($N = 1000, b = 10, x = 20$). A hatványfüggvény-szerű lecsengést az ábrán a pontozott szakasz jelzi. Az ábra forrása [49].

Kimutatták, hogy a hűség független az alkalmazott kezdeti állapotok típusától (ez alapvetően véletlen eloszlású, vagy a \mathbf{H}_0 spektrumának közepén lokalizált állapotokat jelent). Eszerint akár \mathbf{H}_0 sajátállapotaival is dolgozhatunk, ami jelentős mértékben egyszerűsíti mind az elméleti számításokat, mind a numerikus szimulációkat.

Mind analitikus, mind numerikus vizsgálatok azt mutatták, hogy kis perturbációkra alkalmazható a lineáris válaszelmélet. A Gauss- illetve Wigner-tartományok határára rendre

$$x_g \approx \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1 + \frac{1}{b}} \quad (\text{Gauss}) \quad x_e \approx \Delta \frac{\sqrt{b \arctan \frac{1}{b}}}{\pi - 2 \arctan \frac{1}{b}} \quad (\text{Wigner})$$

adódott, ahol Δ a \mathbf{H}_0 átlagos szinttávolsága, míg b a \mathbf{B} sávszélessége.

Az idézett munkák legfontosabb közös állítása egy sejtés, miszerint a nemperturbatív tartományban a hűség anomálishan viselkedik, lecsengése hatványfüggvényt követ (lásd a 11. ábrát):

$$F_{x \gg x_e}(t) = t^{-D_2}$$

Az itt szereplő D_2 nem más, mint a (9) egyenletben tárgyalt második multifraktál-dimenzió. E sejtést egyrészt számos, a cikkek szerzői által elvégzett numerikus szimuláció támasztja alá, másrészt a következő (szintén az említett cikkekből származó) gondolatmenet: tudjuk, hogy véges rendszerekben a hűség csak egy véges értékre képes lecsengeni, mely arányos a rendszerméret inverzével: $F(t \rightarrow \infty) \sim N^{-1}$. Tudván, hogy a hullámfüggvények multifraktál tulajdonságot mutatnak, feltehetjük, hogy a rendszer dinamikailag csak egy „redukált” téren aktív, melynek mérete $N^{D_2^\psi}$, így azt is feltehetjük, hogy esetünkben $F(t \rightarrow \infty) \sim N^{-D_2^\psi}$. Hatványfüggvény alakú lecsengést feltételezve³⁷ lesz egy τ_∞ időpont, amikor $F(\tau_\infty) \approx F(t \rightarrow \infty)$. Erre az előzőek

³⁷Ezt a numerikus szimulációk támasztják alá.

alapján igaz lesz, hogy $\tau_\infty \sim N^{\frac{D_2^\psi}{\gamma}}$, ahol γ a hatványfüggvény-lecsengést meghatározó konstans kitevő. Ezt azonosítva a $\tau \sim N^{\frac{D_2^\psi}{D_2}}$ diffúziós idővel (ez az az idő, ami alatt egy kritikus rendszer hullámfüggvénye „szétfolyik” a teljes rendelkezésre álló tartományban) megkapjuk, hogy $\gamma = D_2$.

Munkánk során e sejtésből indultunk ki. Első lépésként megpróbáltuk numerikus szimulációkkal reprodukálni a felsorolt eredményeket. Ennek során megállapítottuk, hogy a kapott hűség-görbék valóban függetlenek attól, hogy milyen kezdeti állapotokból indulunk ki. Az egyes tartományok határaitra tett becsléseket mi is helyállónak találtuk. A hatványfüggvény-szerű viselkedés nyomaira azonban – noha számos módon próbálkoztunk – nem sikerült rábukkannunk. Ennek oka részben az, hogy a jelenségről beszámoló cikkek számos lépést nem közöltek, amelyek a szimulációk pontos végrehajtásához elengedhetetlenek.

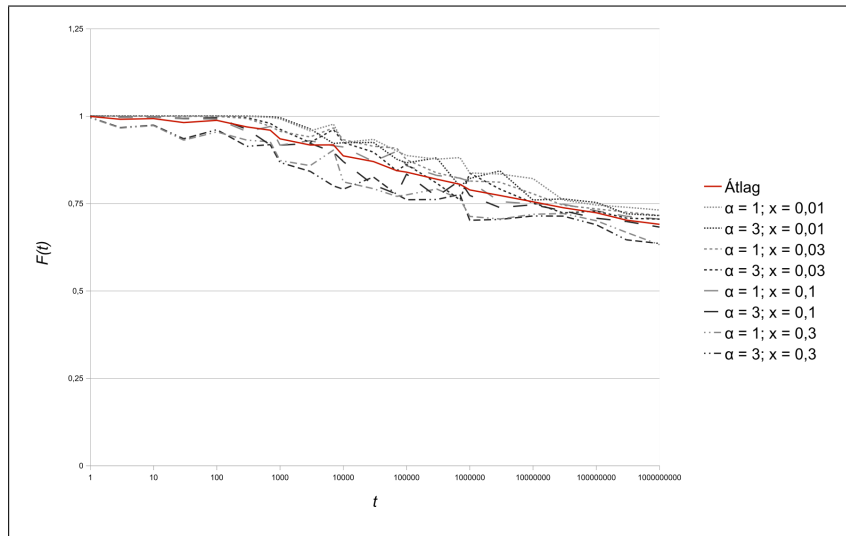
4.4.2. Anomális rugdosott rotátor

Korábban már láttuk, hogy a PBRM sokaság statisztikai jellemzői nagyfokú hasonlóságot mutatnak a (4) és (5) egyenletekkel definiált anomális rugdosott rotátorral. Jogosan merül fel a kérdés, hogy vajon a két rendszer dinamikai tulajdonságai mennyiben hasonlók?

Eddig stacionárius rendszerek hűségét vizsgáltuk. Ám korántsem egyértelmű, hogy a rugdosott rotátorok hűségét hogyan kell értelmeznünk. A (6) által reprezentált operátor nem magának a rendszernek a propagátora, csupán a két rúgás között eltelő, egyetlen periódusnak. Emiatt kérdéses, hogy mennyire volna célravezető a két rendszer Hamilton-operátorából, illetve azok különbségéből kiindulni. Abb és munkatársai a „hagyományos” rugdosott rotátor hűségének vizsgálata során máshogy jártak el: a perturbált rendszert a „rúgás” perturbálásán keresztül definiálták [57]. Mi is ezt az elvet követtük: esetünkben a (13) visszhang-operátorban szereplő U_x egy olyan – (6) alakú – mátrix, melyben az f potenciálban szereplő ϵ értéke $\epsilon + x$ -re módosítandó.

Itt kell megjegyeznünk, hogy a periodikusan rugdosott rendszerek időfejlesztő operátorát úgy szokás értelmezni, hogy először kiválasztanak egy tetszőleges időpontot a perióduson belül (általában a periódus felét), és utána azt határozzák meg, hogy e kezdeti fázis egy teljes periódus alatt hogyan változik. Ebből következik, hogy a hűség mérésekor nincs értelme folytonos időről beszélni, pusztán arról, hogy a hűség hogyan alakul a periódusidő egész számú többszöröseiben. Az általunk közölt ábrákon ezért mértékegység nélkül szerepel az idő, tudván, hogy az valójában csak a rendszer által „átélt” rúgások számát méri.

Tudomásunk szerint korábban az anomális rugdosott rotátor dinamikai tulajdonságait senki sem vizsgálta (egyedül [6] közöl egy rövid elemzést a diffúziós tulajdonságokról). Ezzel szemben egy átfogó elemzés túlmutatna e dolgozat keretein. Így pusztán csak arra vállalkoztunk, hogy egy részletes szimulációsorozat keretében kvalitatívan



12. ábra. Az anomális rugdosott rotátor hűsége racionális β mellett ($N = 199, \alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$). Figyeljük meg a hűség „befagyását”.

vizsgáljuk e rendszer hűségét. A továbbiakban ennek eredményeit ismertetjük.

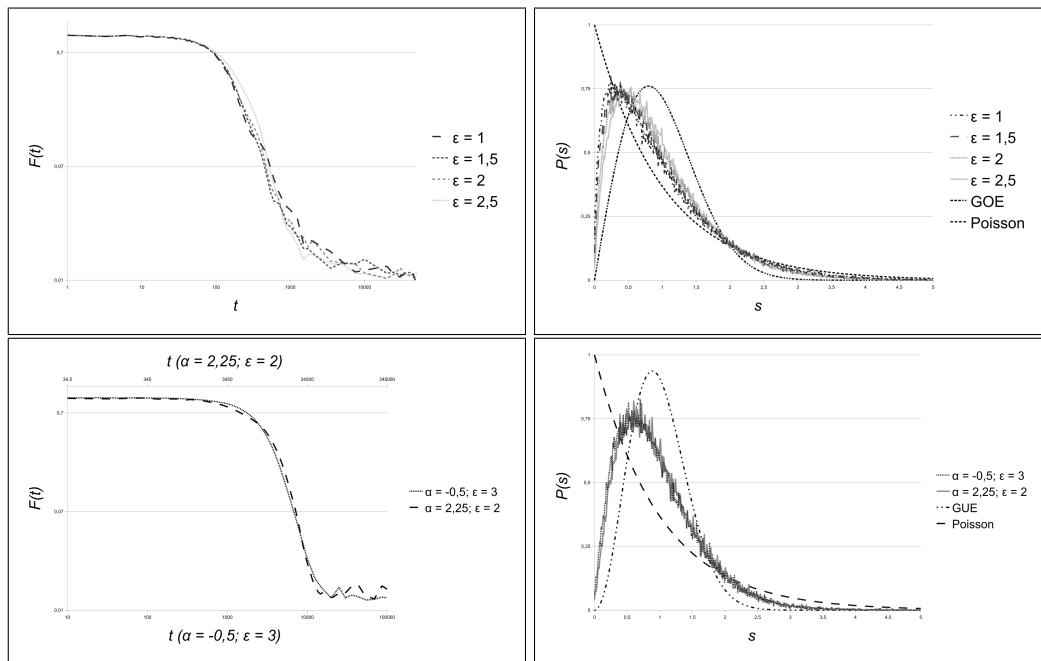
A (6) mátrix öt paramétertől függ. Ezek: az N rendszerméret, a potenciált meghatározó α és ϵ tagok, valamint β (mely a periódusidő tört része) és a θ határfeltétel. A hűség számításakor ezekhez társul az x , mely a perturbáció erősségét határozza meg. Mivel a potenciál e konkrét alakját eredetileg publikáló García-García és munkatársai munkáiból látható, hogy a szinttávolság-statisztika független az N , β és θ paramétereiktől³⁸ [6, 7], ezért feltételeztük, hogy e változók a hűség mérésekor sem játszanak szerepet. Ennek igazolásához egy olyan szimulációsorozatot végeztünk, melyben az N , α , ϵ , β , θ és x változók közül ötöt változtatlanul tartva a „kimaradó” változót véletlenszerűen változtattuk. E sorozatokat elkészítettük az N , a β és a θ változókra egyaránt (változónként több száz hűség-görbét elemezve). Tapasztalatunk szerint a hűség valóban független a rendszermérettől ($N \gtrsim 10$ esetén), és jó közelítéssel független β és θ értékétől is. A „jó közelítés” θ esetén azt jelenti, hogy $\alpha \ll 0$ esetén néhány θ értékre³⁹ rezonanciák lépnek fel, míg β esetén azt, hogy racionális periódusidők mellett a hűségben általában jelentős rezonanciák jelentkezhetnek, extrém esetekben (lásd a 12. ábrát) a hűség „be is fagyhat”⁴⁰. Ám mivel a racionális számok halmaza nullmértékű, ezért e rezonanciák statisztikailag nem játszanak szerepet⁴¹. E felismerések lehetővé teszik,

³⁸Kivétel ez alól a korábban már említett $\theta = 0$ eset.

³⁹Jellemzően olyan racionális számokra, melyek nevezője kellően alacsony.

⁴⁰Ekkor a hűség legfeljebb logaritmus mértékben csökken, lásd [50].

⁴¹Ezzel együtt, mivel a szimulációink során e függés eleinte sok problémát okozott, ezért méréseinket úgy végeztük, hogy β mindenképpen pseudo-irracionális legyen – vagyis olyan racionális szám, melynek tovább nem egyszerűsíthető alakjában a nevező legalább 10^3 .



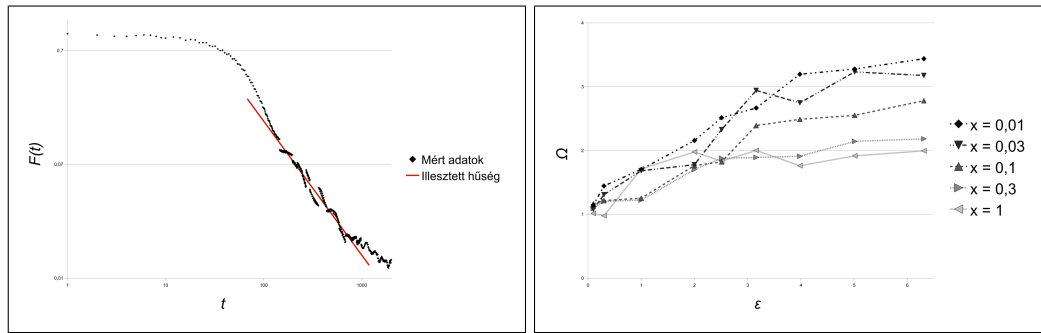
13. ábra. Az anomális rugdosott rotátor hűsége, ha $U_{\alpha,\epsilon}(t)$ és $U_{\alpha,\epsilon+x}(t)$ ugyanabba a csoportba tartoznak. Felső sor (ϵ -függetlenség $\alpha = 0, x = 0,1$ mellett): hűség (bal) és szinttávolság-statisztikák (jobb). Alsó sor (α -skálázódása $x = 0,01$ mellett): hűség (bal) és szinttávolság-statisztikák (jobb).

hogy (6)-an keresztül definiálhassunk egy véletlenmátrix-sokaságot, melynek β és θ a véletlen változói. További szimulációinkat e véletlenmátrix-sokaságon végeztük.

Feltételeztük, hogy a rendszer spektrális tulajdonságai (elsősorban szinttávolság-statisztikája) és hűsége között közvetlen kapcsolat áll fenn. Ennek igazolásához a szimulációk során használt $U_{\alpha,\epsilon}(t)$ „előre-fejlesztő” és $U_{\alpha,\epsilon+x}(t)$ „visszafele-fejlesztő” operátorokat három csoportra (lokalizált, delokalizált, kritikus) osztottuk.

Tapasztalatunk szerint, amennyiben egy adott $\{\epsilon_i\}$ halmaz minden elemére igaz, hogy (adott α és x esetén) $U_{\alpha,\epsilon_i}(t)$ és $U_{\alpha,\epsilon_i+x}(t)$ ugyanabba a kategóriába tartozik (pontosabban, ha szinttávolság-statisztikáik megegyeznek), úgy a kapott hűség-görbék sem fognak ϵ -től függeni. Hasonló, de ennél gyengébb tulajdonság jellemzi α -t is: ilyenkor a hűség-görbék az időtengelyek megfelelő átskálázása esetén egyeznek meg (e két jelenséget a 13. ábra illusztrálja). Ezzel szemben, ha $U_{\alpha,\epsilon}(t)$ és $U_{\alpha,\epsilon+x}(t)$ nem tartozik ugyanabba a csoportba, akkor a hűség általában $F(t) = \exp(-\omega_{\alpha,\epsilon,x}t^2)$ alakú lesz.

Habár PBRM-szimulációink során nem sikerült reprodukálnunk a [49]-ben megjósolt hatványfüggvény-szerinti lecsengést, az anomális rugdosott rotátorral végzett szimulációink kétségtelenül legfontosabb tanulsága, hogy kritikus spektrumok esetén e rendszer hűsége is a hatványfüggvényt követi. Feltételezzük, hogy a kitevők közvetlen



14. ábra. Az anomális rugdosott rotátor hűsége kritikus esetben. Bal: $\alpha = 0, \epsilon = 1, x = 0,2$. A kezdeti stagnálás, majd exponenciális esést követően figyelhető meg az $F(t) \sim t^{-\Omega_{\alpha,\epsilon,x}}$ lecsengés. Jobb: A hatványfüggést meghatározó $\Omega_{\alpha,\epsilon,x}$ együtthatók ϵ - és x -függése $\alpha = 0$ mellett.

összefüggésben lehetnek a többi kritikus jellemzővel, így a sajátvektorok multifraktál-dimenzióival, illetve a rendszer univerzalitási indexével. Ahogy korábban már utaltunk rá, a rendszer spektruma, illetve multifraktál-kitevői analitikusan nem ismertek, így meg sem kíséreltük a lecsengést leíró kitevők meghatározását. Pusztán arra tudunk szimulációink alapján következtetni, hogy (fix α esetén) a kitevő abszolút-értéke ϵ -nal arányosan növekszik, az arányossági tényező pedig fordított arányt mutat x -szel. Megfigyeléseinket a 14. ábra összegzi.



E fejezetben egy ígéretes módszert mutattunk arra, hogy egy tetszőleges kvantumrendszer dinamikai stabilitásáról általános képet kapjunk. Hogy a hűség mennyire hatékony eszköze a dinamikai tulajdonságok összehasonlításának, mi sem bizonyítja jobban, mint hogy a WLRM sokaság és az anomális rugdosott rotátor hűsége, noha a két modellnek nincs köze egymáshoz, nagyon hasonlóan viselkedik. Külön érdekesség, hogy a WLRM sokaság nemperturbatív kritikus tartományában tapasztalt hatványfüggvény-szerű lecsengést az anomális rugdosott rotátor kritikus tartományában is megfigyelhetjük.

Habár a hűség vizsgálata körül sok a nyitott kérdés, és a jelenleg rendelkezésre álló eredmények – illetve az ezekből levont következtetések – között több ellentmondás is van, számos jel utal arra, hogy a hűség a kvantumkaotikus rendszerek egyik legfontosabb jellemzője. Ahogy utaltunk rá, nem zárható ki, hogy a hűséggel kapcsolatos kutatások odáig vezethetnek, hogy lehetséges lesz a kvantumkáoszt közvetlenül a hűség segítségével definiálni, ezáltal megoldva számos problémát, melyet a korrespondencia-elv szül.

Zárszó

Munkánk során olyan kvantumrendszereket vizsgáltunk, amelyek klasszikus kaotikus modellekhez kapcsolódnak. Ezek egy része kevert fázisterű, míg egy másik részüket – bizonyos paraméterek mellett – kritikus viselkedés jellemzi. E rendszerek statikus tulajdonságainak elemzésén túl nagy hangsúlyt fektettünk a dinamikai viselkedésük vizsgálatára. Bemutattunk egy ígéretes, ám kevésbé feltárt módszert – a Loschmidt-echo mérését –, mely megítélésünk szerint a jövőben egyre nagyobb szerephez fog jutni a kvantumkaotikus rendszerek analízisében. Ráműtöttünk továbbá, hogy a véletlen mátrixok elmélete egy olyan eszköztárat biztosít a kvantum-kaológia számára, ami kiválóan alkalmas e modellek vizsgálatához, spektrális és dinamikai kérdésekben egyaránt.

Célkitűzésünk elsősorban e szerteágazó téma minél szélesebb körű bemutatása volt. Ezzel együtt szimulációink során több említésre méltó jelenséget is megfigyeltünk. Ezek közül a legfontosabbak az anomális rugdosott rotátor vizsgálatok kapott eredményeink. Méréseinket itt olyan esetekre is kiterjesztettük, melyeket a korábbi cikkek nem vizsgáltak. Ennek folyományaként találtunk egy lokalizált-delokalizált átmenetet a paraméterter $\alpha > 1$ tartományában. Emellett megvizsgáltuk e rendszer hűségét – ezt tudomásunk szerint eddig senki sem tette meg. A kritikus állapotokban hatványfüggvényjellegű lecsengést, bizonyos speciális esetekben pedig a hűség befagyását tapasztaltuk.

Megítélésünk szerint kiváló kutatási lehetőségeket rejt magában a hűség további vizsgálata. Az anomális rugdosott rotátornál tapasztalt jelenségek analitikus (vagy legalábbis félempirikus) magyarázata, valamint a rendszer spektrumának pontosabb meghatározása igen kívánatos lenne. Ígéretesnek tűnik az általánosított rugdosott rotátor vizsgálata más típusú potenciálokkal is – gondoljuk csak meg, hogy a García-García-féle választásnál nehezen indokolható, hogy mi motiválja a potenciál alakját az $\alpha = 0$ esetben. Az igazi áttörést egyrészt az jelentené, ha sikerülne megfogalmazni egy, a BGS és BTG sejtésekhez hasonló feltételezést a kritikus rendszerek és a véletlen sávmátrixok között, illetve, ha a kritikus rendszerek hűségében tapasztalható anomáliákat univerzálisan össze lehetne kapcsolni e modellek statikus tulajdonságaival (például sajátfüggvényeik multifraktál-dimenzióival).



Köszönettel és hálával tartozom témavezetőmnek, dr. Varga Imrének azért a szinte végtelen számú óráért, amit kérdéseim megvitatására szánt. A dolgozatom által felvetett problémák többsége tőle származik, s nélküle e munka sosem jöhetett volna létre.

Köszönetemet fejezem ki családomnak és barátaimnak, elsősorban szüleimnek, Draviczky Évának és dr. Siska Miklósnak, páromnak, dr. Bartos Beának, valamint Földes D. Péternek, Surányi Kingának és Gergőnek, Tompa Dénesnek, Ungár Péternek, Veress Máténak és Vörösmarti Bencének az egyetemi tanulmányaimhoz nyújtott folyamatos anyagi és erkölcsi támogatásukért. Dolgozatomat nekik ajánlom, valamint Tyutyunak, aki mindig felvidített, akkor is, amikor nem kértem.

Függelék

A Függelékben pár alapfogalmat tisztázunk, melyre e dolgozat több ponton és több, különböző kontextusban is hivatkozik. Éppen ezért az itt következő tárgyalás során semmilyen, a törzsszövegben bevezetett definíciót nem használunk, az ottani megállapításokkal itt nem élünk. Amennyiben mégis szükségünk van egy olyan fogalomra, amit a dolgozat során már definiáltunk, itt újradefiniáljuk azt.

Állításaink és definícióink annyira elterjedtek a szakirodalomban, hogy feleslegesnek éreztünk külön hivatkozásokkal élni. Általánosságban elmondható, hogy a témával foglalkozó szakkönyvek [20, 21, 34], illetve összefoglaló cikkek [1, 40, 50] bőven lefedik azokat a fogalmakat, melyeket itt bevezetünk.

A. Multifraktalitás

A fraktáldimenziót azoknál a geometriai halmazoknál szokás alkalmazni, ahol a legkisebb olyan (euklideszi) dimenzióban, ami a teljes halmazt magába foglalja, a halmaz nullmértékű. A véges dimenziós fraktálok számos érdekes tulajdonsággal bírnak, ezek közül a legfontosabb az önhasnolóság, vagy másként szólva, a „skálafüggetlenség”.

Léteznek azonban olyan vektorhalmazok, amelyek szintén önhasnolóak, ám a beágyazó dimenziójukban nem nullmértékűek. Az ilyen rendszerekről a klasszikus fraktáldimenzió sajnos semmi újtonságot sem árul el, hiszen ekkor a fraktáldimenzió meg fog egyezni a beágyazó dimenzióval. Ezekben az esetekben az önhasnolóság összetettebb módon, a vektorok momentumain keresztül mutatkozik meg.

Legyen $\{\psi(\mathbf{r})\}$ egy rendszer sajátfüggvényeinek halmaza. Ekkor a sajátfüggvények q -adik momentumát definiáló

$$P_q = \int_V |\psi(\mathbf{r})|^{2q} d\mathbf{r}$$

összefüggés átlagának segítségével bevezethetjük a sajátfüggvények multifraktáldimenzióit:

$$\langle P_q \rangle = L^{-D_q^\psi(q-1)}, \quad (14)$$

ahol L a rendszer lineáris mérete és a D_q^ψ számok a különböző (folytonos) q momentumokhoz tartozó multifraktál-dimenziók. Hasonló módon vezethetők be a lokális állapotosság fluktuációit leíró D_q^μ multifraktál-dimenziók, melyekről a legtöbb valódi rendszer esetén belátható, hogy $D_q^\psi = dD_q^\mu$, így a továbbiakban ezekkel külön nem foglalkozunk.

Motivációként a (14) definícióhoz gondoljuk végig, hogy a „normális” fraktáldi-

menziót hogyan definiáltuk⁴²! Először felosztottuk a d (euklideszi értelemben vett) dimenziós teret δ lineáris méretű hiperkockákra, majd összeadtuk azon hiperkockák számát, amelyekbe a fraktál „belenyúlik” (ezt a számot jelöljük $N(\delta)$ -val). Ekkor a fraktál box-dimenzióját a

$$D_B = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta} \quad (15)$$

kifejezés határozta meg.

Az általánosítást a (15) definícióból kiindulva tehetjük meg. Eszerint $\delta \rightarrow 0$ esetén $N(\delta) \sim \delta^{-D_B}$. Vegyük észre, hogy $N(\delta)$ nem más, mint a hullámfüggvények nulladik momentumának „ δ -kvantált kiterjedése” a δ élhosszúságú d -dimenziós rácsban. Ha a hullámfüggvények eloszlása egyenletes, úgy a P_q momentum várható értéke egy cellában a nulladik momentum várható értékének q -adik hatványa, s a nulladik momentum várható értéke egy cellában $\langle P_0 \rangle_\delta = N^{-1}$ lesz. Így $\langle P_q \rangle_\delta = \langle P_0^q \rangle_\delta = N^{-q} = \delta^{qD_B}$, vagyis a teljes várható érték $\langle P_q \rangle = N \langle P_q \rangle_\delta = \delta^{(q-1)D_B}$. Ezt az összefüggést általánosan elfogadva (valamint a felosztás δ finomságát L^{-1} -nek tekintve) jutunk a (14) definícióhoz.

Az összes multifraktál-dimenzió közül kiemelten fontos szerepe van a másodiknak, melyet korrelációs dimenzióknak is hívnak. Az ezt definiáló momentum az ún. inverz részvételi szám (*Inverse Participation Number* — IPN), a fentiek szerint⁴³ $\langle P_2 \rangle = L^{-D_2}$.

Vegyük észre, hogy $q = 0$ esetén $P_0 = V$, így D_0 a rendszer (box-)dimenziója⁴⁴. Továbbá $q = 1$ esetén (14) jobb oldala azonosan 1, ezért az első fraktáldimenziót egy apró módosítással a következőképpen definiáljuk:

$$\left\langle - \int_V |\psi(\mathbf{r})|^2 \ln |\psi(\mathbf{r})|^2 \, d\mathbf{r} \right\rangle = D_1 \ln L$$

Így D_1 nem más, mint a sajátvektorok Shannon-entrópiája.

B. Statisztikák

Tekintsünk egy N részecskéből álló „véletlen fizikai rendszert”, melyet a spektrumban szereplő energianívók, valamint a sajátállapotok együttes eloszlásfüggvénye definiál. Jelölje $\{\varepsilon_i\}$ a spektrumot, $\{|\psi_i\rangle\}$ a sajátállapotok halmazát, $p(\{\varepsilon_i\})$ a spektrum és $p(\{\psi_{ij}\})$ a sajátállapotok együttes eloszlásfüggvényeit.

⁴²„Normális” fraktáldimenzió alatt a tárgyalás egyszerűsége végett az általánosabb Hausdorff-dimenzió helyett a box-dimenziót értjük.

⁴³Itt és a továbbiakban D_q alatt D_q^ψ -t értünk.

⁴⁴Ha az integrálást a teljes térfogatra végezzük, akkor a dimenziót kapjuk, ha csak arra a térfogatra, ahol $\psi(\mathbf{r}) \neq 0$, akkor a box-dimenziót.

A sokrészecskés rendszerek fizikájában úgy szokás jellemezni egy adott rendszert, hogy olyan mérőszámokat, illetve eloszlásokat definiálunk, amelyek pregnánsan leírják az adott rendszer viselkedésének egyes aspektusait. Ezek a mérőszámok, valamint eloszlások segítenek minket abban, hogy az egyes rendszereket kategorizálhassuk, illetve egymással összehasonlíthassuk őket.

A statisztikus fizika hagyományosan olyan mérőszámokat szokott definiálni, mint például a hőmérséklet, a nyomás, vagy éppen a mágnesezettség. E mennyiségeket végső soron a rendszert alkotó részecskék mozgásegyenleteiből, illetve elemi tulajdonságaiból származtatjuk. Véletlen rendszereknél hasonlóan járunk el – vagyis, olyan leírókat, illetve függvényeket keresünk, melyek jól jellemeznek egy-egy rendszert és összehasonlíthatóvá teszik azt más rendszerekkel. A különbség az, hogy ezeket a mennyiségeket az imént definiált együttes eloszlásfüggvényekből származtatjuk.

Megjegyezzük, hogy az imént definiált spektrális együttes eloszlásfüggvény funkcióját tekintve nagyban hasonlít a statisztikus fizikából ismert partíciós függvényhez. Éppen emiatt, habár az alábbi mennyiségeket véletlen rendszerekre fogjuk definiálni, definícióink értelmesek determinisztikus modellek esetén is. Ilyenkor az egyes kifejezések a partíciós függvényből vezethetők le.

Az első ilyen mennyiség, amit bevezetünk, az univerzalitási index, melyet β -val jelölünk. Ez rendszerenként más és más, az egyes modellek szimmetria-tulajdonságait hivatott kifejezni. A legtöbb esetben ennek segítségével kifejezhetővé válik az adott rendszer szabadsági fokainak száma:

$$n = N + \frac{\beta}{2}N(N - 1) \quad (16)$$

A következő lépésben definiáljuk az $R_k(\{\varepsilon_i\})$ függvényt, amely annak a valószínűségét mutatja meg, hogy az $1 \dots k$ szintek a megadott $\{\varepsilon_i\}$ halmaz infinitezimális környezetében helyezkednek el:

$$R_k(\{\varepsilon_i\}) = \frac{N!}{(N - k)!} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N-k} p(\{\varepsilon_i\}) d\varepsilon_{k+1} \dots d\varepsilon_N \quad (17)$$

Az így definiált R_k függvények közül a két legfontosabb az R_2 ún. párkorrelációs függvény, amely gyakorlatilag az összes korrelációval kapcsolatos függvénynek az „alapja”, valamint R_1 , ami nem más, mint az állapotsűrűség:

$$\rho(\varepsilon) = N \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(\varepsilon, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N) d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_N \equiv R_1(\varepsilon) \quad (18)$$

Mielőtt továbbmegyünk, gondoljuk meg, hogy mit mondhatunk az általunk definiált N részecskés véletlen rendszer makroszkopikus méretű megfelelőjéről. A statisztikus

fizika a termodinamikai limesz során az egyes mennyiségek $N \rightarrow \infty$ esetén vett határértékét érti (a megfelelő sűrűségek konstans értéken való tartása mellett, természetesen). Ez a megközelítés véletlen kvantumrendszerek esetén nem mindig alkalmazható. Az ilyen modelleknél a következő megfontoláshoz folyamodhatunk: feltételezzük, hogy a véges méretből adódó korrekciók elsősorban a spektrum széleinél jelentkeznek. Ennek egyik lehetséges következménye, hogy számításainkat úgy végezzük el, hogy csak a spektrum közepét vesszük figyelembe, az ettől eltérő energiákat egyszerűen kihagyjuk a formuláinkból. A másik lehetséges megoldás a spektrum kiterítése⁴⁵. Ilyenkor úgy módosítjuk a spektrumot, hogy az átlagos szinttávolság konstanssá váljon, ami által az állapotsűrűség is mindenütt konstans lesz. Ezt a gyakorlatban számos módon végre lehet hajtani [20]. A legegyszerűbb eljárás az, ha az eredeti spektrumból kiszámítjuk az $\Omega(\varepsilon)$ állapotösszeget, majd az új energiákat a

$$\varepsilon'_i = N\Omega(\varepsilon_i)$$

kifejezéssel definiáljuk. Megjegyezzük, hogy numerikus szimulációink során minden esetben, amikor kiterített spektrumokkal kellett dolgoznunk, mi is ezt az eljárást használtuk. Ilyenkor az $\Omega(\varepsilon)$ állapotösszeget Monte-Carlo módszerrel becsültük.

A továbbiakban a spektrumon – hacsak külön nem jelezzük az eltérést e konvenciótól – a kifejtett spektrumot kell érteni.

Ahogy fentebb említettük, a korrelációkkal kapcsolatos összefüggések többsége az R_2 párkorrelációs függvényből származtathatóak, mely tehát azt mondja meg, hogy mekkora valószínűséggel lesz két szint két megadott érték infinitezimális környezetében. Ha most feltesszük, hogy a szintek már ki vannak terítve, akkor az R_2 függvény értéke csak a két megadott szint távolságától függ, így ekkor értelmes bevezetni a következő definíciót⁴⁶:

$$R_2(r) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} R_2\left(\varepsilon - \frac{r}{2}, \varepsilon + \frac{r}{2}\right) d\varepsilon, \quad (19)$$

Az imént definiált R_2 függvény helyett elterjedtebb az Y_2 clustering-függvény használata. Ez szemléletesen azt mutatja meg, hogy az egyes energianívók mennyire „társítják” egymást:

$$Y_2(r) = 1 - R_2(r)$$

Ennek Fourier-transzformáltja a forma-faktor ($b_2(t) \equiv \int Y_2(r)e^{-irt} dr$), ami leginkább a rendszer dinamikai jellemzéséhez használható.

⁴⁵Az angol *unfolding* kifejezés után. Sajnos a magyar szakirodalomban nincs egységes kifejezés erre, mi a továbbiakban a kifejtés, a kiterítés vagy egyszerűen az unfolding nevet fogjuk használni.

⁴⁶Megjegyezzük, hogy így két különböző R_2 függvényt definiáltunk: az egyik a (17) szerinti kétváltozós párkorrelációs függvény, a másik a (19) szerinti egyváltozós függvény. Ennek a kissé félrevezető definíciónak az az oka, hogy a szakirodalom mindkét függvényt R_2 -vel jelöli.

A következő $\eta_\beta(\varepsilon, L)$ függvény:

$$\eta_\beta(\varepsilon, L) = \int_{\varepsilon - \frac{L}{2}}^{\varepsilon + \frac{L}{2}} \rho(\varepsilon') \, d\varepsilon' \equiv \int_{\varepsilon - \frac{L}{2}}^{\varepsilon + \frac{L}{2}} R_1(\varepsilon') \, d\varepsilon',$$

mely a szintek számát jelöli $\varepsilon - \frac{L}{2}$ és $\varepsilon + \frac{L}{2}$ között, segítségünkre lesz az ún. szintszámosság-szórás (*level number variance*) definiálásához (ami tulajdonképpen $\eta_\beta(\varepsilon, L)$ szórásnégyzete):

$$\Sigma_\beta^2(L) = \langle \eta_\beta^2(\varepsilon, L) \rangle_\varepsilon - \langle \eta_\beta(\varepsilon, L) \rangle_\varepsilon^2 = L + 2 \int_0^L (L-s) R_2(s) \, ds$$

Ez alapján definiálható a spektrális kompresszibilitás (*spectral compressibility*):

$$\chi_\beta = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\Sigma_\beta^2(L)}{L} \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial \Sigma_\beta^2(L)}{\partial L}$$

Egy másik hasznos mérték, a spektrális merevség (*spectral rigidity*), más néven Dyson-Mehta statisztika vezethető be az $\Omega_\beta(\varepsilon)$ állapotösszeg segítségével:

$$\Delta_{3,\beta}(L) = \frac{1}{L} \left\langle \min_{A,B} \int_\varepsilon^{\varepsilon+L} |\Omega_\beta(\xi) - (A\xi + B)|^2 \, d\xi \right\rangle_\varepsilon$$

A szintszámosság-szórás, illetve a spektrális merevség gyakorlatilag ugyanazt a tulajdonságot mutatja meg (végső soron arra enged következtetni, hogy a spektrum mennyire korrelált), csak az egyik egy differenciál-, míg a másik egy integrálformula. Hasznosságuk abban nyilvánul meg, hogy a belőlük számítható spektrális kompresszibilitás ismeretében következtethetünk arra, hogy egy adott rendszer „mekkora mértékben” kaotikus.

Az irodalomban talán leggyakrabban előforduló függvény kétségkívül a $P(s)$ szinttávolság-statisztika (*level spacing statistics*). E függvény két szomszédos szint távolságának a valószínűsége. Fontosságát (a függvényhez kapcsolódó kiterjedt irodalmon felül) az indokolja, hogy numerikusan könnyen mérhető, illetve nagyon pregnánsan jellemzi az egyes rendszereket.

Egyszerű példaként tekintsünk egy olyan rendszert, melynek Hamilton-operátorát egy olyan 2×2 -es valós szimmetrikus mátrix reprezentálja, melynek diagonális elemei a 0 várható értékű, $\sqrt{2}\sigma$ szórású, míg az átlón kívüli eleme a 0 várható értékű, σ szórású normális eloszlásból kerülnek ki⁴⁷:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

⁴⁷Az ilyen mátrixra azt mondjuk, hogy egy véletlen mátrix a 2×2 -es GOE sokaságból.

Ennek sajátértékei a $\det \mathbf{H} - \varepsilon \mathbf{I} = 0$ egyenlet alapján

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{-(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

Az $x = a - c$, $y = 2b$ jelöléssel a sajátértékek távolsága az

$$s = \varepsilon_+ - \varepsilon_- = \sqrt{x^2 + y^2}$$

alakot ölti. Mivel $b \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ és $a, c \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$, ezért $x, y \sim \mathcal{N}(0, 4\sigma^2)$. Ebből könnyen kiszámíthatjuk a $P(s)$ sűrűségfüggvényt:

$$\begin{aligned} P(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{8\sigma^2}} \delta(s - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{8\sigma^2}} \delta(s - r) 2\pi r \, dr \\ &= \frac{1}{4\sigma^2} s e^{-\frac{s^2}{8\sigma^2}} = \frac{\pi}{2} s e^{-\frac{\pi}{4}s^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

ahol az utolsó lépés a normálás következménye.

Ezt az eloszlást még Wigner Jenő vezette le a véletlen mátrixok elméletének hajnalán [58], iránta való tiszteletből *Wigner surmise* néven ismeri az irodalom. Tetszőleges $N \times N$ -es, a fentihez hasonló véletlen rendszer szinttávolság-statisztikája szintén a fenti alakot közelíti, legalábbis abban, hogy $P(s \rightarrow 0) \sim s$ és $P(s \rightarrow \infty) \sim \exp(-\eta s^2)$ valamilyen η paraméterrel. Ezt a szinttávolság-statisztikát Wigner-Dyson statisztikának hívják.

Másik példaként határozzuk meg annak a véletlen rendszernek a szinttávolság-statisztikáját, amelyben a (kiterítetlen) spektrum minden tagját azonos eloszlású valószínűségi változók határozzák meg! Mivel a kiterítést követően a spektrumban átlagosan egész számonként kapunk egy szintet, ám az egyes energianívók (az őket generáló azonos eloszlású változók függetlensége miatt) teljesen véletlenszerűen fluktuálnak, ezért a spektrum megfeleltethető egy olyan Poisson-folyamatnak, ahol az egyes események között eltelt idő várhatóan egységnyi (amennyiben az energianívókat analógnak tekintjük a hipotetikus Poisson folyamatunk által leírt jelenség bekövetkezési időpontjaival). Ezt az analógiát követve, a szomszédos energiaszintek távolságának az egymás után bekövetkező események között eltelt idő a megfelelője. Mivel utóbbiról tudjuk, hogy a sűrűségfüggvényét az exponenciális eloszlás írja le, ezért az általunk vizsgált rendszer szinttávolság-eloszlása a

$$P(s) = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda s} \quad (\lambda = 1), \quad \text{vagyis a} \quad P(s) = e^{-s} \quad (21)$$

alakot követi. A fenti analógiára való tekintettel ezt a sűrűségfüggvényt Poisson-statisztikának szokás hívni.

C. Numerikus módszerek

A továbbiakban bemutatunk néhány olyan megoldást, melyet numerikus szimulációink során alkalmaztunk.

C.1. Intervallum-felcserélő leképezés

Idézzük fel a (7) egyenletben felírt unitér időfejlesztő operátor kifejtett alakját $N\alpha \notin \mathbb{Z}$ esetén:

$$\mathbf{U}_{p',p} = \frac{1}{N} e^{-\frac{2\pi i}{N} p'^2} \frac{1 - \exp(2\pi i N \alpha)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi i (p-p'+N\alpha)}{N}\right)}$$

Ez a formula nehezen kezelhető numerikusan, hiszen a benne szereplő tört számlálója képzetes. Ennek kiejtéséhez használjuk ki, hogy ha

$$r = 2 \cos \xi \quad \text{és} \quad \xi = \frac{\varphi + \pi}{2}, \quad \text{akkor} \quad 1 - \exp(i\varphi) = r \exp(i\xi),$$

vagyis

$$1 - \exp(i\varphi) = 2 \cos \frac{\varphi + \pi}{2} \exp\left(i \frac{\varphi + \pi}{2}\right) = -2i \sin \frac{\varphi}{2} \exp \frac{i\varphi}{2}.$$

Ezzel az időfejlesztő operátor mátrixának második tagja:

$$\frac{1 - \exp(2\pi i N \gamma)}{1 - \exp\left[\frac{2\pi i}{N}(p - p' + N\gamma)\right]} = \frac{-2i \sin(N\pi\gamma) \exp(iN\pi\gamma)}{-2i \sin\left[\frac{\pi}{N}(p - p' + N\gamma)\right] \exp\left[i\frac{\pi}{N}(p - p' + N\gamma)\right]}$$

Egyszerűsítés és átrendezés után ez

$$N \cdot \underbrace{\frac{\sin(N\pi\gamma) \exp[i\pi(N-1)\gamma]}{N}}_{U_0} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{N}(p-p') - \gamma\right)} \exp\left[-\frac{i\pi(p-p')}{N}\right],$$

ahol U_0 egy p -független konstans, a p -függő tagok pedig csak a számlálóban tartalmazzanak képzetes számokat. Az általunk használt formula tehát:

$$\mathbf{U}_{p',p} = U_0 e^{-\frac{2\pi i}{N} p'^2} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{N}(p-p') - \alpha\right)} \exp\left(-\frac{\pi i (p-p')}{N}\right)$$

C.2. A hűség számítása

Induljunk ki a (13) visszhang-operátorból! Az ebben szereplő $U_0(t)$ és $U_x(t)$ propagátorok helyett tekintsük azt az általánosabb esetet, amikor a visszhang-operátort az $U^+(t)$ „előre”- és az $U^-(t)$ „vissza”-propagátorokból képezzük. Jelöljük ezen propagátorok mátrixainak sajátértékeit $\{\lambda_n^\pm\}$ -nel, sajátvektorait $\{|\lambda_n^\pm\rangle\}$ -nel. Ezekkel kifejtjük a visszhang-operátor mátrixát:

$$\mathbf{M}(t) = \sum_{m,n} \underbrace{|\lambda_m^-\rangle \langle \lambda_m^-| (\lambda_m^-)^{-t}}_{\mathbf{U}^-(-t)} \overbrace{|\lambda_n^+\rangle \langle \lambda_n^+| (\lambda_n^+)^t}^{\mathbf{U}^+(t)} = \sum_{m,n} |\lambda_m^-\rangle \langle \lambda_n^+| \langle \lambda_m^- | \lambda_n^+ \rangle \left(\frac{\lambda_n^+}{\lambda_m^-} \right)^t$$

Mivel U^- és U^+ mátrixa unitér, ezért a sajátértékek a komplex egységkörön helyezkednek el. A $\lambda_n^\pm \equiv \exp(-i\varphi_n^\pm)$ jelöléssel bevezetve a sajátértékek fázisát átírhatjuk az iménti kifejtést:

$$\mathbf{M}(t) = \sum_{m,n} |\lambda_m^-\rangle \langle \lambda_n^+| \langle \lambda_m^- | \lambda_n^+ \rangle e^{-i(\varphi_n^+ - \varphi_m^-)t}$$

Numerikus szempontból az okozza a problémát, hogy az fenti összegben N^2 darab $|\lambda_m^-\rangle \langle \lambda_n^+|$ alakú diád szerepel, melyek kiszámítása önmagában is egy $\mathcal{O}(N^2)$ -es probléma, vagyis a mátrix direkt kiszámítása $\mathcal{O}(N^4)$ szerint skálázódik. Ám vegyük észre, hogy a hűség meghatározásához nem feltétlenül szükséges a visszhang-operátort kiszámolni. Egy konkrét $|\psi\rangle$ kezdeti állapot esetén ugyanis a hűségi amplitúdó az

$$f_\psi(t) = \langle \psi | \mathbf{M}(t) | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_{m,n} |\lambda_m^-\rangle \langle \lambda_n^+| \langle \lambda_m^- | \lambda_n^+ \rangle e^{-i(\varphi_n^+ - \varphi_m^-)t} | \psi \rangle$$

alakot ölti, melyből a hűség

$$F(t) = \frac{1}{M} \sum_{\psi} |f_\psi(t)|^2$$

alapján számítható (itt M a számításhoz felhasznált kezdeti állapotok száma). Definiáljuk a következő mennyiségeket:

$$\begin{aligned} A_m^\psi &= \langle \psi | \lambda_m^- \rangle \\ B_\psi^n &= \langle \lambda_n^+ | \psi \rangle \\ C_n^m &= \langle \lambda_m^- | \lambda_n^+ \rangle \\ D_n^m &= -i(\varphi_n^+ - \varphi_m^-) \end{aligned}$$

Ezek felhasználásával $f_\psi(t) = \sum_{m,n} A_m^\psi B_\psi^n C_n^m \exp(D_n^m t)$. Mivel A_m^ψ és B_ψ^n előállítására $\mathcal{O}(MN^2)$, C_n^m előállítására $\mathcal{O}(N^3)$, míg D_n^m előállítására $\mathcal{O}(N^2)$ lépést igényel, ezért az algoritmus $\mathcal{O}(N^2(N+2M))$ lépésben előkészíthető úgy, hogy a futás során már csak $\mathcal{O}(TMN^2)$ műveletet kelljen elvégeznie (T az algoritmus által megvizsgált időpontok száma).

További optimalizációra ad lehetőséget, ha minden egyes t időpontban előre kiszámoljuk az

$$E_n^m(t) = C_n^m \exp(D_n^m t)$$

mennyiségeket, ekkor ugyanis $\mathcal{O}(TMN^2)$ helyett csak $\mathcal{O}(TN^2)$ alkalommal kell komplex exponenseket számolni.

Úgy tűnhet, hogy a $G_{mn}^\psi = A_m^\psi B_\psi^n C_n^m$ kifejezés előre való kiszámolásával az $f_\psi(t) = \sum_{m,n} G_{mn}^\psi \exp(D_n^m t)$ hűségi amplitúdó kiszámításakor két szorzást megspórolhatunk lépésenként. Ám ehhez az eddigi $\mathcal{O}(N^2)$ és $\mathcal{O}(MN)$ memóriaigényű mátrixok helyett egy $\mathcal{O}(MN^2)$ méretű objektumot kellene tárolni. A mai számítógépek felépítése (a várhatóan gyakori memória-lapozás) miatt egy ilyen algoritmus várhatóan lassabban futna, mint az eredetileg javasolt.

Megjegyezzük még, hogy amennyiben egyenlő Δt időközökre számítjuk ki a hűséget, kihasználhatjuk, hogy a k -edik lépésben $\exp(D_n^m k \Delta t) = \exp^k(D_n^m \Delta t) = \exp(D_n^m \Delta t) \exp^{k-1}(D_n^m \Delta t)$, vagyis a $\Delta D_n^m = \exp(D_n^m \Delta t)$ és $D_n^m(k) = (\Delta D_n^m)^k$ jelölésekkel a hűség $k \Delta t$ idő elteltével

$$F(k) = \frac{1}{M} \sum_\psi \left| \sum_{m,n} A_m^\psi B_\psi^n C_n^m D_n^m(k-1) \Delta D_n^m \right|^2$$

Ha tehát a $D_n^m(k)$ mátrixot a $(k-1)$ -edik lépésben egyszerűen tagonként felülírjuk $D_n^m(k-1) \Delta D_n^m$ -nel, iteratív módon megkaphatjuk a következő lépéshez használandó $D_n^m(k)$ mátrixot. Így a visszhang méréséhez egyáltalán nem kell (komplex) exponenciálisokat számolni (pusztán csak az előkészületek során).

Hivatkozások

- [1] F. M. Izrailev. Simple models of quantum chaos: Spectrum and eigenfunctions. *Physics Reports*, 196(5–6):299–392, 1990.
- [2] B. V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52(5):263–379, 1979.
- [3] Á. Siska. Chaos: Another tool for synthesis. In *Proceedings of the 2nd Music in the Global Village Conference*, Budapest, Hungary, Dec 2009. Hungarian Computer Music Foundation.
- [4] G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izraelev, and J. Ford. Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation. In G. Casati and J. Ford, editors, *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, volume 93 of *Lecture Notes in Physics*, pages 334–352. Springer-Verlag, 1979.
- [5] B. Chirikov and D. Shepelyansky. Chirikov standard map. *Scholarpedia*, 3(3):3550, 2008. revision #91129.
- [6] A. M. García-García and J. Wang. Anderson localization in quantum chaos: Scaling and universality. *Acta Physica Polonica A*, 112(4):635–653, Oct 2007.
- [7] A. M. García-García and J. Wang. Anderson transition in quantum chaos. *Physical Review Letters*, 94(24):244102, Jun 2005.
- [8] O. Giraud, J. Marklof, and S. O’Keefe. Intermediate statistics in quantum maps. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(28):303, 2004.
- [9] E. B. Bogomolny, U. Gerland, and C. Schmit. Short-range plasma model for intermediate spectral statistics. *European Physical Journal B*, 19(1):121–132, 2001.
- [10] E. B. Bogomolny, U. Gerland, and C. Schmit. Models of intermediate spectral statistics. *Physical Review E*, 59(2):R1315–R1318, Feb 1999.
- [11] J. Martin, O. Giraud, and B. Georgeot. Multifractality and intermediate statistics in quantum maps. *Physical Review E*, 77(3):035201, Mar 2008.
- [12] O. Giraud and B. Georgeot. Intermediate quantum maps for quantum computation. *Physical Review A*, 72(3):042312, Oct 2005.
- [13] Y. S. Weinstein, S. Lloyd, J. Emerson, and D. G. Cory. Experimental implementation of the quantum baker’s map. *Physical Review Letters*, 89(15):157902, Sep 2002.
- [14] C. Miquel, J. P. Paz, M. Saraceno, E. Knill, R. Laflamme, and C. Negrevergne. Interpretation of tomography and spectroscopy as dual forms of quantum computation. *Nature*, 418:59–62, Jul 2002.

- [15] M. Terraneo, B. Georgeot, and D. L. Shepelyansky. Quantum computation and analysis of wigner and husimi functions: Toward a quantum image treatment. *Physical Review E*, 71(6):066215, Jun 2005.
- [16] J. Emerson, Y. S. Weinstein, S. Lloyd, and D. G. Cory. Fidelity decay as an efficient indicator of quantum chaos. *Physical Review Letters*, 89(28):284102, Dec 2002.
- [17] D. Poulin, R. Blume-Kohout, R. Laflamme, and H. Ollivier. Exponential speedup with a single bit of quantum information: Measuring the average fidelity decay. *Physical Review Letters*, 92(17):177906, Apr 2004.
- [18] E. Bogomolny, R. Dubertrand, and C. Schmit. Spectral statistics of a pseudo-integrable map: the general case. *Nonlinearity*, 22(9):2101–2126, 2009.
- [19] E. P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *The Annals of Mathematics*, 62(3):548–564, Nov 1955.
- [20] F. Haake. *Quantum Signatures of Chaos*. Springer-Verlag, 2010.
- [21] M. L. Mehta. *Random Matrices*, volume 172 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 3rd edition, 2004.
- [22] B. Coupier. Random matrix theory and wilson dirac operator. Master’s thesis, Karl-Franzens-Universität, Graz, 2000.
- [23] R. Balian. Random matrices and information theory. *Il Nuovo Cimento B*, 57(1):183–193, 1968.
- [24] K. Życzkowski and M. Kuś. Random unitary matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27(12):4235, 1994.
- [25] A. D. Mirlin, Y. V. Fyodorov, F.-M. Dittes, J. Quezada, and T. H. Seligman. Transition from localized to extended eigenstates in the ensemble of power-law random banded matrices. *Physical Review E*, 54(4):3221–3230, Oct 1996.
- [26] F. Evers and A. D. Mirlin. Anderson transitions. *Reviews of Modern Physics*, 80(4):1355–1417, Oct–Dec 2008.
- [27] I. Varga. Fluctuation of correlation dimension and inverse participation number at the anderson transition. *Physical Review B*, 66:094201, 2002.
- [28] E. P. Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *The Annals of Mathematics*, 67(2):325–327, Mar 1958.
- [29] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Physical Review Letters*, 52(1):1–4, Jan 1984.
- [30] M. C. Gutzwiller. *Chaos in classical and quantum mechanics*. Springer-Verlag, 1990.

- [31] M. V. Berry and M. Tabor. Level clustering in the regular spectrum. *Proceedings of the Royal Society A*, 356(1686):375–394, Sep 1977.
- [32] E. B. Bogomolny and C. Schmit. Spectral statistics of a quantum interval-exchange map. *Physical Review Letters*, 93(25):254102, Dec 2004.
- [33] A. M. García-García and J. Wang. Semi-poisson statistics in quantum chaos. *Physical Review E*, 73(3):036210, Mar 2006.
- [34] J. Sólyom. *A Modern Szilárdtestfizika Alapjai*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.
- [35] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical Review*, 109(1492), 1958.
- [36] N. F. Mott. Electrons in glass, Dec 1977. Nobel lecture.
- [37] A. F. Joffe and A. R. Regel. In A. F. Gibson, F. A. Kröger, and R. E. Burgess, editors, *Progress in Semiconductors*, volume 4, page 237. Heywood and Company, London, 1960.
- [38] J. T. Edwards and D. J. Thouless. Numerical studies of localization in disordered systems. *Journal of Physics C*, 5(8):807–820, 1972.
- [39] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan. Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions. *Physical Review Letters*, 42(10):673–676, Mar 1979.
- [40] A. D. Mirlin. Statistics of energy levels and eigenfunctions in disordered systems. *Physics Reports*, 326(5–6):259–382, 2000.
- [41] A. Furusaki. Recent progress in the theory of anderson localization. In *Forum of Condensed Matter Physics: Past, Present and Future*, Hong Kong, Dec 2006. The University of Hong Kong.
- [42] B. I. Shklovskii, B. Shapiro, B. R. Sears, P. Lambrianides, and H. B. Shore. Statistics of spectra of disordered systems near the metal-insulator transition. *Physical Review B*, 47(17):11487–11490, May 1993.
- [43] A. M. García-García. Power spectrum characterization of the anderson transition. *Physical Review E*, 73(2):026213, Feb 2006.
- [44] L. E. Boltzmann. Weitere studien über das wärmeleichgewicht unter gasmolekülen. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse*, 66:275–370, 1872.
- [45] J. J. Loschmidt. Über den zustand des wärmeleichgewichtes eines systems von körpern mit rücksicht auf die schwerkraft. *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse*, 73:128–172, 1876.
- [46] L. E. Boltzmann. *Vorlesungen über Gastheorie*. Johann Ambrosius Barth, 1896.

- [47] A. Peres. Stability of quantum motion in chaotic and regular systems. *Physical Review A*, 30(4):1610–1615, Oct 1984.
- [48] F. M. Cucchietti, H. M. Pastawski, and D. A. Wisniacki. Decoherence as decay of the loschmidt echo in a lorentz gas. *Physical Review E*, 65(4):045206, Apr 2002.
- [49] J. D. Bodyfelt. *Probing Complex Dynamics via Loschmidt Echoes*. PhD thesis, Wesleyan University, 2009.
- [50] T. Gorina, T. Prosen, T. H. Seligman, and M. Žnidarič. Dynamics of loschmidt echoes and fidelity decay. *Physics Reports*, 435:33–156, 2006.
- [51] F. M. Cucchietti, C. H. Lewenkopf, E. R. Mucciolo, H. M. Pastawski, and R. O. Vallejos. Measuring the lyapunov exponent using quantum mechanics. *Physical Review E*, 30:1610–1615, 1984.
- [52] F. M. Cucchietti, R. Jalabert, and H. M. Pastawski. Universality of the lyapunov regime for the loschmidt echo. *Physical Review B*, 70, 2004.
- [53] F. M. Cucchietti, C. H. Lewenkopf, and H. M. Pastawski. Decay of the loschmidt echo in a time-dependent environment. *Physical Review E*, 74, 2006.
- [54] J. A. Méndez-Bermúdez, T. Kottos, and D. Cohen. Parametric invariant random matrix model and the emergence of multifractality. *Physical Review E*, 73(3):036204, Mar 2006.
- [55] G. S. Ng. Signatures of phase transition in wave dynamics of complex systems. Master’s thesis, Wesleyan University, 2008.
- [56] G. S. Ng, J. Bodyfelt, and T. Kottos. Critical fidelity at the metal-insulator transition. *Physical Review Letters*, 97(25):256404, Dec 2006.
- [57] M. Abb, I. Guarneri, and S. Wimberger. Pseudoclassical theory for fidelity of nearly resonant quantum rotors. *Physical Review E*, 80(3):035206, Sep 2009.
- [58] E. P. Wigner. Statistical properties of real symmetric matrices with many dimensions. In *Proceedings of the 4th Canadian Mathematical Congress*, page 174, Toronto, 1957. University of Toronto Press.